Б. Г. Зив В. М. Мейлер А. Г. Баханский

ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ

ПОСОБИЕ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ
7—11 КЛАССОВ
ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ УЧРЕЖДЕНИЙ

Допущено
Министерством образования
Российской Федерации

5-е издание

Москва «Просвещение»
2003

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я72
З-59

Рецензенты: кандидат педагогических наук *Е. Н. Турецкий*
учитель математики школы № 5 ст. Октябрьская
Краснодарского края *Л. А. Козлова*

Зив Б. Г.
З-59 Задачи по геометрии: Пособие для учащихся 7—11 кл. общеобразоват. учреждений / Б. Г. Зив, В. М. Мейлер, А. Г. Баханский.— 5-е изд.— М.: Просвещение, 2003.— 271 с.: ил.— ISBN 5-09-012568-6.

Книга адресована учащимся и учителям, содержит задачи по всем разделам курса геометрии. Упражнения даны различной степени сложности, что поможет учителю в осуществлении индивидуального подхода к учащимся.

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я72

ISBN 5-09-012568-6

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее пособие содержит обширный задачный материал по всему курсу геометрии от 7-го до 11-го класса.

Задачи в каждом параграфе скомпонованы по темам и группам сложности. Первая и вторая группы каждого параграфа содержат задачи минимальной сложности. Для решения этих задач достаточно уметь применять основные геометрические факты и использовать простейшие алгоритмы. Это продиктовано разделом программы по математике «Требования к математической подготовке учащихся» (Программы общеобразовательных учреждений. Математика.— М.: Просвещение, 1996).

Третья и четвертая группы задач каждого параграфа представляют задачи средней степени сложности. Для их решения необходимо небольшое отклонение от непосредственного применения знаний, умение делать простые обобщения.

Пятая и шестая группы задач каждого параграфа предназначены для наиболее подготовленных учащихся. При решении этих задач требуется уметь применять знания в усложненных ситуациях, иметь достаточно высокий уровень развития вычислительных навыков и навыков проведения алгебраических преобразований. Задачи пятой и шестой групп в большей степени, чем задачи предыдущих групп, опираются на предшествующий материал курса. В некоторых параграфах имеются седьмая и восьмая группы задач, отмеченные знаком «*». Эти задачи носят творческий характер. При их решении приходится анализировать сложные нестандартные геометрические ситуации, самостоятельно открывать новые факты, устанавливать отношения между различными элементами. Эти задачи могут использоваться во внеклассной работе.

Задачи в параграфах расположены парами. Так, задачи 1, 3, 5, 7-й групп аналогичны по сложности задачам 2, 4, 6, 8-й групп соответственно. Такое расположение задач удобно для составления вариантов проверочных работ, распределения упражнений для классных и домашних заданий.

По каждой теме в пособии приведены контрольные задания. Эти задания состоят из наиболее типичных задач данной темы.

Кроме того, в каждом задании имеется задача повышенной трудности, обозначенная знаком «*». Эти задачи, как правило, не требуют проведения сложных вычислений и алгебраических преобразований. Они проверяют умения применять знания в нестандартной ситуации.

Предполагается, что контрольные задания помогут учителю организовать тематический учет знаний по геометрии. Для удобства составления вариантов каждое из заданий разбито на группы. В каждой из групп помещены задачи примерно одинакового уровня сложности.

В конце пособия приведены ответы, даны указания к задачам, которые могут вызвать затруднения, и помещены решения наиболее сложных задач первой части пособия.

Данная книга есть результат многолетней работы авторского коллектива по организации методического обеспечения преподавания геометрии в г. Санкт-Петербурге и Нижегородской области.

НАЧАЛЬНЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

§ 1. ТОЧКИ, ПРЯМЫЕ, ОТРЕЗКИ, ЛУЧИ

1.1. 1) Проведите прямую и обозначьте на ней точки E и F. Отметьте на этой прямой точку A, лежащую между точками E и F, и точку K так, чтобы точка F лежала между точками A и K.

2) а) На рисунке 1 найдите все лучи с началом в точке K.
б) Каким отрезкам с концами в обозначенных точках (рис. 1) принадлежит точка K?

1.2. 1) Проведите прямую и обозначьте на ней точки M и N. Отметьте на этой прямой точку D, лежащую между точками M и N, и точку E так, чтобы точка M лежала между точками E и D.

2) а) На рисунке 2 найдите все лучи с началом в точке C.
б) Каким отрезкам с концами в обозначенных точках (рис. 2) принадлежит точка C?

1.3. 1) Отметьте три точки. Проведите все прямые, проходящие через пары этих точек. Сколько таких прямых можно провести? Рассмотрите все возможные случаи.

2) а) На рисунке 3 найдите все лучи с началом в точках M и A.

б) Каким отрезкам с концами в обозначенных точках (рис. 3) принадлежит точка M?

1.4. 1) Нарисуйте три прямые, у которых:
а) только одна точка пересечения;
б) только две точки пересечения.

2) а) На рисунке 4 найдите все лучи с началом в точках K и D.

б) Каким отрезкам с концами в обозначенных точках (рис. 4) принадлежит точка K?

1.5. 1) Отметьте четыре точки. Проведите все прямые, проходящие через пары этих точек. Сколько таких прямых можно провести? Сделайте рисунок.

2) Сколько отрезков с концами в обозначенных точках изображено на рисунке 5?

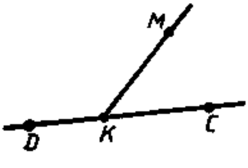

Рис. 1

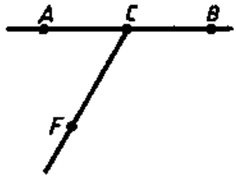

Рис. 2

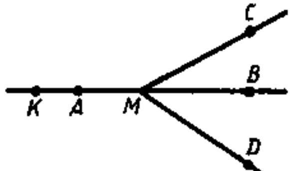

Рис. 3

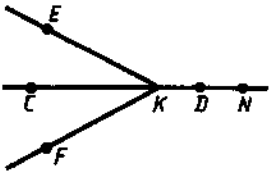

Рис. 4

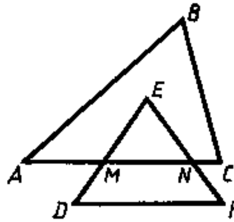

Рис. 5

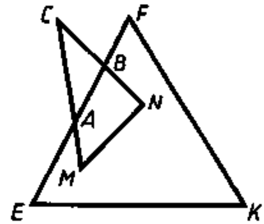

Рис. 6

1.6. 1) Сколько точек пересечения могут иметь три прямые? Рассмотрите все возможные случаи. Сделайте рисунок.
2) Сколько отрезков с концами в обозначенных точках изображено на рисунке 6?

§ 2. СРАВНЕНИЕ И ИЗМЕРЕНИЕ ОТРЕЗКОВ

2.1. 1) На прямой a расположены точки A, B и C, причем $AB=5$ см, $BC=7$ см. Какой может быть длина AC?
2) Точка C — середина отрезка AB. Найдите длину отрезка AC в дециметрах, если $AB=7$ м 58 см.

2.2. 1) На прямой m расположены точки M, N и K, причем $MN=8$ см, $NK=12$ см. Какой может быть длина MK?
2) Точка F — середина отрезка EL. $EF=3$ дм 12 см. Найдите длину EL в метрах.

2.3. 1) Точки A и B расположены по разные стороны от прямой a; $C \in a$, $AB=37$ дм, $AC=12$ дм, $CB=26$ дм. Является ли точка C точкой пересечения AB и a?
2) Точки C и D расположены на отрезке AB так, что $AC=DB$, точка C лежит между точками A и D. Найдите расстояние между серединами отрезков AC и DB, если $AB=58$ см, а $CD=2{,}8$ дм.

2.4. 1) Точки E и F расположены по разные стороны от прямой b; $M \in b$, $EF=29$ см, $EM=14$ см, $MF=16$ см. Является ли точка M точкой пересечения EF и b?
2) Точки E и F расположены на отрезке CD так, что $CE=DF$, точка E лежит между точками C и F. Расстояние между серединами отрезков CE и DF равно 8,5 дм, а длина отрезка CD равна 1,2 м. Найдите EF.

2.5. 1) На прямой a расположены точки M, A, и B. Найдите MA и MB, если $AB=6$ см и $MA+MB=9$ см.
2) На прямой отмечены последовательно точки A, B, C и D так, что $AB=CD$. Существуют ли еще пары равных отрезков с концами в названных точках?

2.6. 1) На прямой b расположены точки A, E и F. Найдите AE и AF, если $BF=8$ см и $AE+AF=14$ см.
2) На прямой отмечены последовательно точки A, B, C и D так, что $AC=BD$. Существуют ли еще пары равных отрезков с концами в названных точках?

2.7*. Зная, что $AB=8$, M — середина отрезка AB, найдите на прямой AB все такие точки X, для которых сумма $XA+XB+XM$ равна 9. Покажите эти точки на рисунке.

2.8*. Зная, что $AB=8$, M — середина отрезка AB, найдите на прямой AB все такие точки X, для которых сумма $XA+XB+XM$ равна 15. Покажите эти точки на рисунке.

§ 3. СРАВНЕНИЕ И ИЗМЕРЕНИЕ УГЛОВ

3.1. 1) Сколько развернутых и прямых углов изображено на рисунке 7? Назовите какие-нибудь два острых и два тупых угла.

2) Прямой угол ADB разделен лучом DC на два угла, из которых один больше другого на 8°. Найдите градусные меры этих углов.

3.2. 1) Сколько развернутых и прямых углов изображено на рисунке 8? Назовите какие-нибудь два острых и два тупых угла.

2) Прямой угол AOB разделен лучом OC на два угла, из которых один в 4 раза больше другого. Найдите градусные меры этих углов.

3.3. 1) Сколько тупых, развернутых, прямых и острых углов изображено на рисунке 9?

2) Угол AOB, равный 124°, лучом OC разделен на два угла, разность которых равна 34°. Найдите эти углы. Чему равен угол, образованный лучом OC и биссектрисой угла AOB?

3.4. 1) Сколько развернутых, прямых, острых и тупых углов изображено на рисунке 10?

2) Угол AOB, равный 164°, лучом OC разделен на два угла, градусные меры которых относятся как $3:1$. Найдите эти углы. Чему равен угол, образованный лучом OC и биссектрисой угла AOB?

3.5. 1) Сколько развернутых, прямых, острых и тупых углов изображено на рисунке 11? Запишите в порядке возрастания все углы, имеющие общую сторону OB.

2) Луч BM делит развернутый угол ABC в отношении $5:1$, считая от луча BA. Найдите угол ABK, если BK — биссектриса угла MBC.

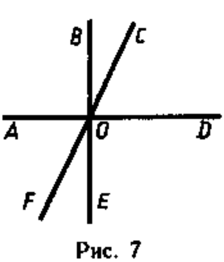

Рис. 7

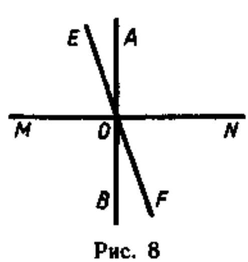

Рис. 8

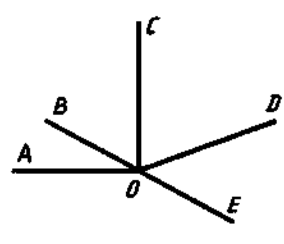

Рис. 9

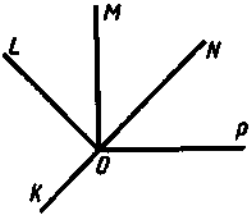

Рис. 10

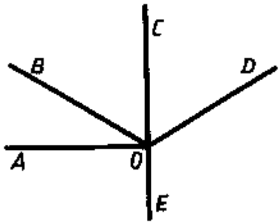

Рис. 11

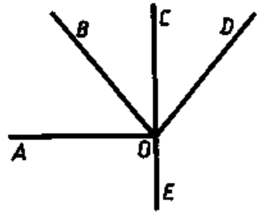

Рис. 12

3.6. 1) Сколько развернутых, прямых, острых и тупых углов изображено на рисунке 12? Запишите в порядке возрастания все углы, имеющие общую сторону OC.
2) Луч MF делит развернутый угол EMH в отношении $1:2$, считая от луча ME. Найдите величину угла LMH, если ML — биссектриса угла EMF.

3.7*. Прямой угол двумя лучами, исходящими из его вершины, разделен на три угла, один из которых равен разности двух других углов. Найдите величину большего из этих углов.

3.8*. Прямой угол разделен лучом, исходящим из его вершины, на два таких угла, что половина одного угла равна трети другого. Найдите эти углы.

§ 4. СМЕЖНЫЕ И ВЕРТИКАЛЬНЫЕ УГЛЫ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ ПРЯМЫЕ

4.1. 1) Один из двух углов ABC и CBD, изображенных на рисунке 13, на 50° больше другого. Найдите эти углы.
2) На рисунке 14 $AF \perp EB$, $\angle COB = 20°$.
а) Найдите угол DOF.
б) Найдите пару тупых вертикальных углов.

4.2. 1) Один из двух углов hk и kl, изображенных на рисунке 15, меньше другого в 3 раза. Найдите эти углы.
2) На рисунке 16 $AD \perp BE$, $\angle EOF = 60°$.
а) Найдите угол DOC.
б) Назовите пару тупых вертикальных углов.

4.3. 1) Разность двух углов AOB и COB, изображенных на рисунке 17, равна 54°. Найдите эти углы.
2) На рисунке 18 $AC \perp DB$, OK — биссектриса угла AOB.
а) Может ли угол POC быть равным 44°59′?
б) Найдите отношение величин углов DOK и POB.

4.4. 1) Градусные меры углов hk и kl, изображенных на рисунке 19, относятся как $1:4$. Найдите эти углы.
2) На рисунке 20 $AD \perp BE$, OC — биссектриса угла DOB.
а) Может ли угол FOE быть равным 45°1′?
б) Чему равна разность градусных мер углов FOB и EOC?

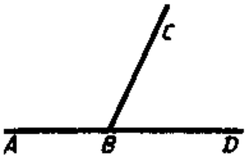

Рис. 13

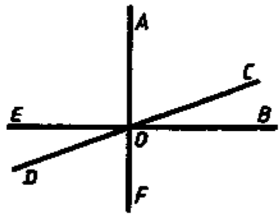

Рис. 14

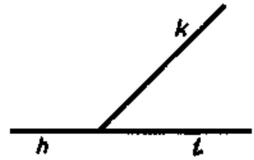

Рис. 15

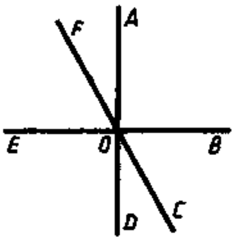

Рис. 16

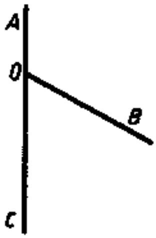

Рис. 17

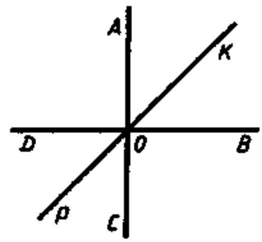

Рис. 18

4.5. 1) На рисунке 21 $BC \perp AD$, $\angle 2 = \angle 3$. Равны ли $\angle 1$ и $\angle 4$?
2) Прямые AB, CD и EF пересекаются в точке O так, что луч OE — биссектриса угла AOD, равного 165°. Найдите угол AOF (рис. 22).

4.6. 1) На рисунке 23 $KT \perp MP$, $\angle 3 = \angle 4$. Равны ли $\angle 1$ и $\angle 2$?
2) Прямые AD, BE и CF пересекаются в точке O так, что луч OE — биссектриса угла FOD, $\angle FOE = 37°30'$. Найдите угол BOD (рис. 24).

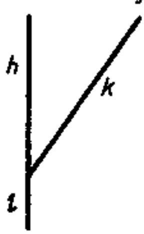

Рис. 19

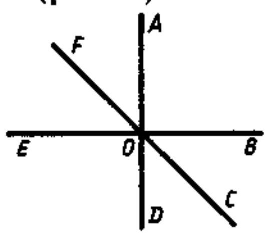

Рис. 20

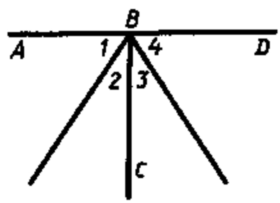

Рис. 21

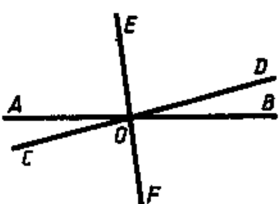

Рис. 22

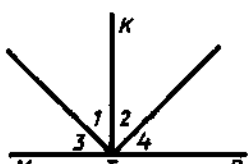

Рис. 23

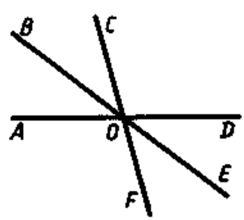

Рис. 24

4.7*. При пересечении двух прямых один из образовавшихся углов в 8 раз меньше суммы остальных углов. Найдите величину каждого из этих углов.

4.8*. При пересечении двух прямых один из образовавшихся углов равен $\frac{2}{7}$ суммы остальных углов. Найдите величину каждого из этих углов.

ТРЕУГОЛЬНИКИ

§ 5. ТРЕУГОЛЬНИК, РАВЕНСТВО ТРЕУГОЛЬНИКОВ, ПЕРИМЕТР ТРЕУГОЛЬНИКА

5.1. Треугольники ABC и MNP равны, причем $\angle A=\angle M$, $\angle B=\angle N$.
а) Найдите BC и угол C, если $NP=12$ см, а $\angle P=12°1'$.
б) Могут ли в треугольнике ABC быть равными стороны AB и BC, если все стороны $\triangle MNP$ имеют разные длины?

5.2. Треугольники OKT и ABC равны, причем $\angle B=17°35'$, $OK=23$ см, $\angle O=\angle A$, $\angle T=\angle C$.
а) Могут ли все углы треугольника ABC быть равными, если два угла $\triangle OKT$ имеют различные градусные меры?
б) Найдите AB и угол K.

5.3. Треугольники MNP и SKT равны, причем $MP=ST$, $\angle M=\angle S$, $MN=17$ дм, $\angle K=70°18'$.
а) Найдите угол N и SK.
б) Может ли периметр треугольника SKT быть больше периметра треугольника PMN?

5.4. Треугольники OEB и SKT равны, причем $\angle B=\angle T$, $EB=KT$.
а) Найдите OB и угол K, если $\angle E=121°15'$, а $ST=16$ дм.
б) Может ли отношение периметров данных треугольников быть равным двум?

5.5. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны, причем $AB=B_1A_1$, $A_1C_1=CB$, $\angle B=15°$, $B_1C_1=5$ м.
а) Найдите AC и угол A.
б) Может ли периметр треугольника $A_1B_1C_1$ быть больше, чем $2A_1B_1+AC$, если в треугольнике ABC $AB=BC$?

5.6. Треугольник $A_1B_1C_1$ равен треугольнику ABC, причем $B_1C_1=AC$, $A_1C_1=AB$.
а) Найдите B_1A_1 и угол C, если $\angle B_1=60°$, $BC=8$ м.
б) Может ли периметр треугольника ABC быть равным $2AC+3B_1C_1$, если известно, что все его стороны равны?

§ 6. ПЕРВЫЙ ПРИЗНАК РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ. МЕДИАНА, БИССЕКТРИСА И ВЫСОТА ТРЕУГОЛЬНИКА

6.1. 1) Докажите, что треугольники, изображенные на рисунке 25, равны.
2) BD является высотой и медианой треугольника ABC, изображенного на рисунке 26.

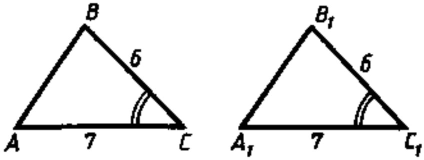

Рис. 25

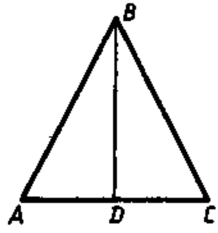

Рис. 26

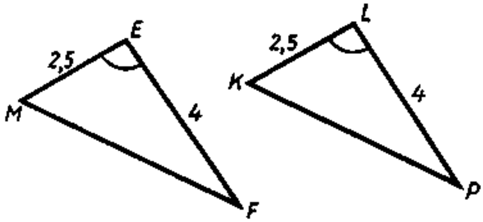

Рис. 27

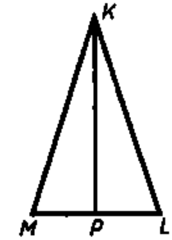

Рис. 28

а) Докажите, что $\triangle ABD = \triangle BDC$.

б) Докажите, что $AB = BC$.

6.2. 1) Докажите, что треугольники, изображенные на рисунке 27, равны.

2) KP — биссектриса треугольника MKL, изображенного на рисунке 28, $MK = KL$.

а) Докажите, что $\triangle MPK = \triangle LKP$.

б) Докажите, что KP — медиана треугольника MKL.

6.3. 1) Докажите, что $\triangle BOA = \triangle COE$ (рис. 29), если $AO = OC$, $BO = OE$.

2) На рисунке 30 $BD = DE$ и $\angle BDA = \angle EDA$.

а) Докажите, что $\triangle ADB = \triangle ADE$.

б) Докажите, что AD — биссектриса треугольника ABC.

6.4. 1) Докажите, что $\triangle HOP = \triangle KOM$ (рис. 31), если $OH = OK$, $OP = OM$.

2) На рисунке 32 $PM = PE$ и $\angle EPH = \angle MPH$.

а) Докажите, что $\triangle PEH = \triangle PMH$.

б) Докажите, что HP — биссектриса треугольника KMH.

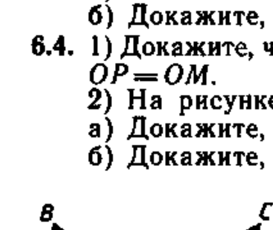

Рис. 29

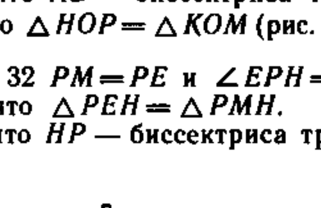

Рис. 30

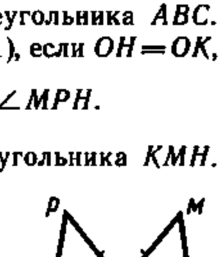

Рис. 31

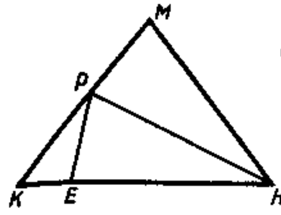

Рис. 32

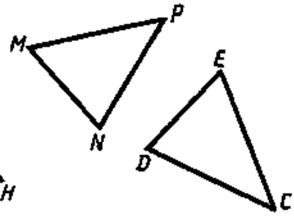

Рис. 33

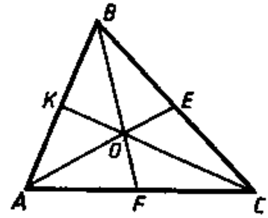

Рис. 34

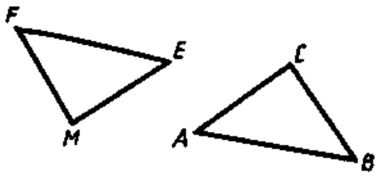

Рис. 35

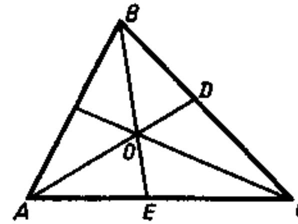

Рис. 36

6.5. 1) На рисунке 33 изображены треугольники MNP и CDE, у которых $\angle M = \angle D$, $MN = DE$. Докажите, что $\angle E = \angle N$, если $MP = CD$.

2) На рисунке 34 AE и BF — медианы треугольника ABC; $AK = 10{,}7$ дм. Найдите длину отрезка KB.

6.6. 1) На рисунке 35 изображены треугольники EFM и ABC, у которых $\angle F = \angle B$, $FE = AB$ и $FM = BC$. Докажите, что $\angle M = \angle C$.

2) На рисунке 36 AD и BE — биссектрисы треугольника ABC; $\angle BCO = 37°40'$. Найдите величину угла OCA.

6.7*. На рисунке 37 BE и CF — высоты треугольника ABC. При помощи только линейки постройте высоту AX этого треугольника. Найдите длину отрезка BC, если $AX = BE$, $CX = CE$ и $AC = 17$ дм.

6.8*. На рисунке 38 KP и MF — высоты треугольника KML. При помощи только линейки постройте высоту LX этого треугольника. Найдите величину угла XLM, если $KP = LX$, $MP = MX$ и $\angle PKM = 27°$.

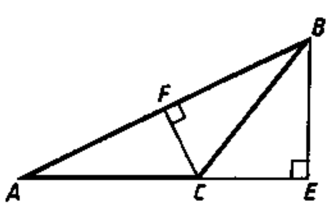

Рис. 37

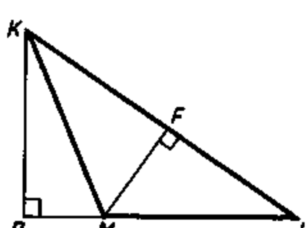

Рис. 38

§ 7. СВОЙСТВА РАВНОБЕДРЕННОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

7.1. 1) На рисунке 39 $AB=BC$. Докажите, что $\angle 1=\angle 2$.
2) BD является высотой равнобедренного треугольника ABC ($AB=BC$); $\angle ABD=17°$, $AD=9$ см. Найдите углы DBC, ABC и основание AC.

7.2. 1) На рисунке 40 $AB=BC$. Докажите, что $\angle 1=\angle 2$.
2) BD является биссектрисой равнобедренного треугольника ABC ($AB=BC$); $AC=18$ см, $\angle DBC=21°$. Найдите углы ABD, ADB и длину отрезка AD.

7.3. 1) На рисунке 41 равнобедренный треугольник ABC и равнобедренный треугольник ADC имеют общее основание. Докажите, что $\angle BAD=\angle BCD$.

2) На медиане CM равнобедренного треугольника ABC с основанием AB взята точка O. Докажите, что треугольник AOB равнобедренный.

7.4. 1) На рисунке 42 равнобедренные треугольники ABC и ADC имеют общее основание AC. Докажите, что $\angle BAD=\angle BCD$.

2) На высоте AH равнобедренного треугольника ABC с основанием BC взята точка M. Докажите, что треугольник BMC равнобедренный.

7.5. 1) На рисунке 43 треугольник ABC равнобедренный с основанием AC, L — середина AC, $AM=CK$. Докажите, что $ML=LK$.

2) Равнобедренные треугольники ABC и DBC имеют общее основание BC. Вершины A и D находятся по разные

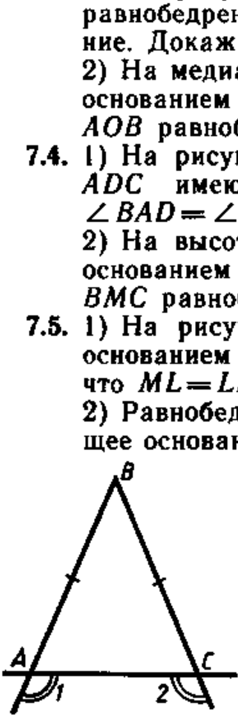

Рис. 39

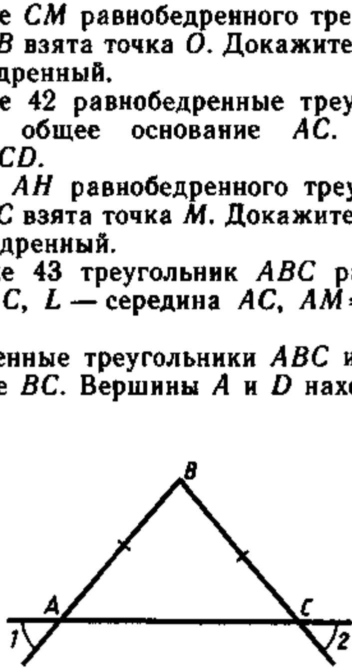

Рис. 40

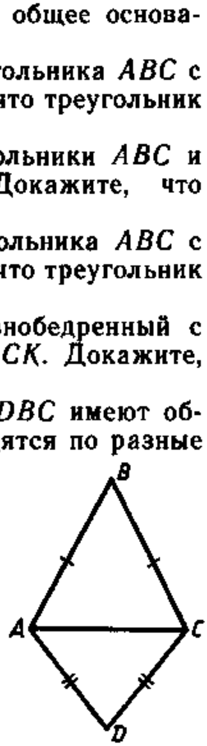

Рис. 41

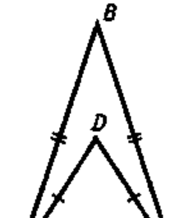

Рис. 42

Рис. 43

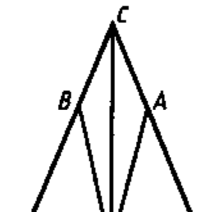

Рис. 44

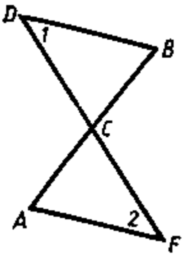

Рис. 45

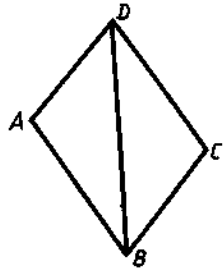

Рис. 46

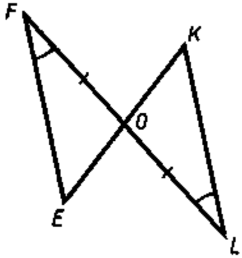

Рис. 47

стороны от BC. Отрезки AD и BC пересекаются в точке O. Докажите, что $AD \perp BC$.

7.6. 1) На рисунке 44 изображен равнобедренный треугольник с основанием PT, CO — высота треугольника, $PB = TA$. Докажите, что $\angle PBO = \angle OAT$.

2) Равнобедренные треугольники ABC и ABD имеют общее основание AB. Вершины C и D находятся по разные стороны от AB. Отрезки AB и CD пересекаются в точке M. Докажите, что M — середина AB.

§ 8. ВТОРОЙ И ТРЕТИЙ ПРИЗНАКИ РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ

8.1. 1) На рисунке 45 $\angle 1 = \angle 2$ и $DC = CE$. Докажите, что $BC = AC$.

2) На рисунке 46 $AB = CD$, $BC = AD$, $\angle ABD = 27°$. Найдите величину угла BDC.

8.2. 1) На рисунке 47 $FO = OL$, $\angle EFO = \angle OLK$. Докажите, что $FE = KL$.

2) На рисунке 48 $AB = AD$, $BC = CD$, $\angle ACD = 19°$. Найдите величину угла ACB.

8.3. 1) На рисунке 49 $NP = MK$, $MN = PK$, $\angle NMK = 137°$. Найдите $\angle 1$.

2) AD и CE — биссектрисы равнобедренного треугольника с основанием AC. Докажите, что $\triangle AEC = \triangle CDA$.

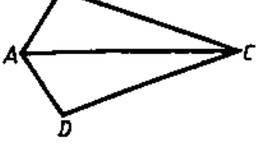

Рис. 48

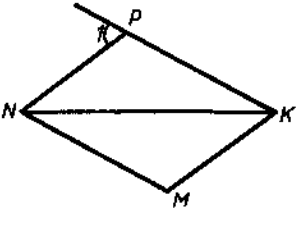

Рис. 49

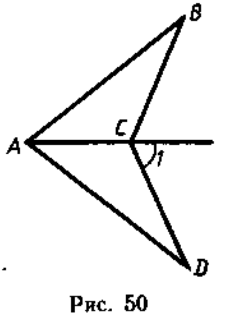

Рис. 50

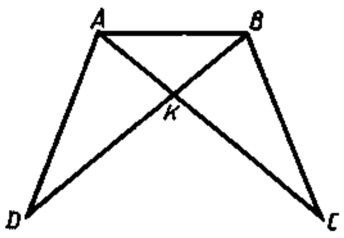

Рис. 51

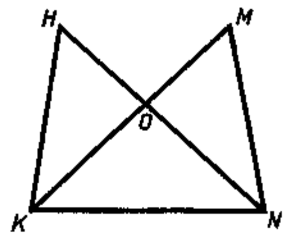

Рис. 52

8.4. 1) На рисунке 50 $AB=AD$, $BC=CD$, $\angle ACB=121°$. Найдите $\angle 1$.
2) AE и KM — биссектрисы равнобедренного треугольника APK с основанием AK. Докажите, что треугольники APE и KPM равны.

8.5. 1) На рисунке 51 $\angle DAB=\angle ABC$, $AK=KB$. Докажите, что $\angle ADB=\angle BCA$.
2) Точки C и D расположены по разные стороны от прямой AB так, что $AD=AC$, $BD=DC$. Докажите, что AB — биссектриса угла DAC.

8.6. 1) На рисунке 52 $\angle HKN=\angle MNK$, $KO=ON$. Докажите, что $\angle KHN=\angle KMN$.
2) Точки M и E расположены по разные стороны от прямой OP так, что $OM=PE$ и $MP=OE$. Докажите, что $\angle MOP=\angle EPO$ и $\angle MPO=\angle EOP$.

8.7*. 1) На одной стороне угла с вершиной A отмечены точки D и B, на другой стороне — C и E так, что $AD=AC=3$ см, $AB=AE=4$ см. Докажите, что: а) $BC=ED$; б) $KB=KE$, где K — точка пересечения отрезков BC и ED.
2) ABC и $A_1B_1C_1$ — равнобедренные треугольники с основаниями AC и A_1C_1, точки M и M_1 — середины сторон BC и B_1C_1 соответственно, $AB=A_1B_1$, $AM=A_1M_1$. Докажите, что $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$.

8.8*. 1) На одной стороне угла с вершиной B отмечены точки M и O, на другой — K и P так, что $BM=BP$, $BO<BM$, $BK<BP$, а $\angle OPB=\angle KMB$. Докажите, что:
а) $MK=OP$;
б) $TM=TP$, где T — точка пересечения отрезков MK и OP.
2) AC и A_1C_1 — основания равнобедренных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, точки M и M_1 — середины сторон BC и B_1C_1 соответственно, $AC=A_1C_1$, $AB=A_1B_1$. Докажите, что $\triangle ABM=\triangle A_1B_1M_1$.

§ 9. ОКРУЖНОСТЬ. ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ

9.1. 1) На рисунке 53 изображена окружность с центром O, $\angle AOB=\angle COD$. Найдите AB, если известно, что $CD=5$ см.
2) Отложите от луча PK угол, равный углу A (рис. 54).

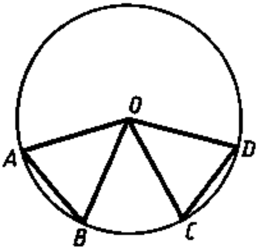

Рис. 53

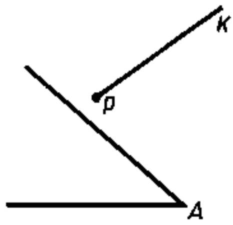

Рис. 54

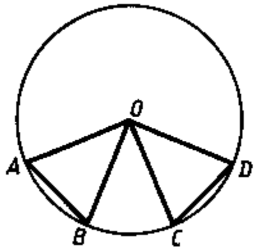

Рис. 55

9.2. 1) На рисунке 55 изображена окружность с центром O, $AB=CD$. Найдите угол COD, если известно, что $\angle AOB=37°$.

2) Постройте биссектрису данного угла B (рис. 56).

9.3. 1) На рисунке 57 изображена окружность с центром O, хорда AB равна радиусу окружности, угол OAB равен 60°. Найдите $\angle COD$.

2) Отложите от данного луча угол, равный данному.

9.4. 1) На рисунке 58 изображена окружность с центром O, хорда PT равна радиусу окружности, угол MOP равен 120°. Найдите $\angle OTP$.

2) Постройте биссектрису данного неразвернутого угла.

9.5. 1) На рисунке 59 изображена окружность с центром O, $AB=DE$. Докажите, что угол AOD равен углу BOE.

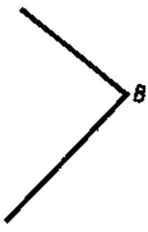

Рис. 56

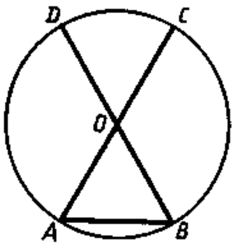

Рис. 57

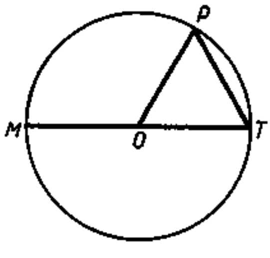

Рис. 58

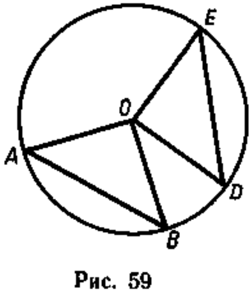

Рис. 59

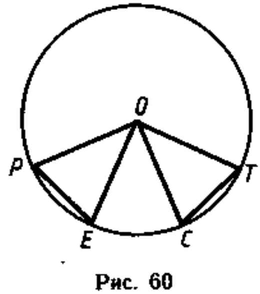

Рис. 60

2) Даны тупой угол A и луч MK. Отложите от луча MK угол, равный углу, смежному с углом A.

9.6. 1) На рисунке 60 изображена окружность с центром O, $\angle POC = \angle EOT$. Докажите, что $PE = CT$.

2) Дан острый угол A. Постройте биссектрису угла, смежного с углом A.

§ 10. ПОСТРОЕНИЕ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХ ПРЯМЫХ

10.1. 1) Через точку A проведите прямую, перпендикулярную прямой a (рис. 61).

2) Постройте медиану AM треугольника ABC (рис. 62).

10.2. 1) Через точку B проведите прямую, перпендикулярную прямой m (рис. 63).

2) Постройте медиану MK треугольника EMF (рис. 64).

10.3. 1) Постройте любые два взаимно перпендикулярных диаметра окружности.

2) Постройте высоту AH треугольника ABC (рис. 65).

10.4. 1) Постройте любые две взаимно перпендикулярные хорды окружности.

2) Постройте высоту BH треугольника ABC (рис. 66).

10.5. 1) Постройте угол 45°.

2) Постройте окружность с диаметром, равным данному отрезку.

10.6. 1) Постройте угол 135°.

2) Даны две точки, являющиеся концами диаметра окружности. Постройте эту окружность.

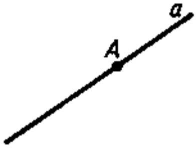

Рис. 61

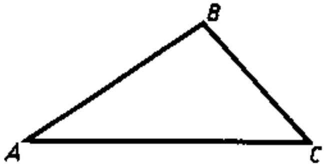

Рис. 62

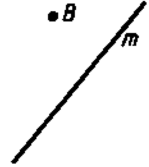

Рис. 63

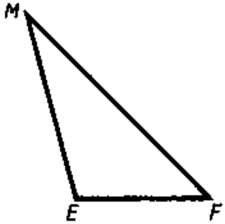

Рис. 64

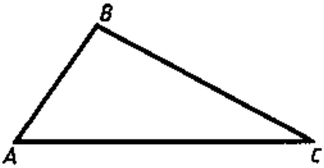

Рис. 65

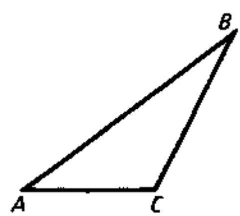

Рис. 66

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ

§ 11. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ. ПРИЗНАКИ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ ПРЯМЫХ

11.1. 1) Параллельны ли прямые a и b, изображенные на рисунке 67?

2) На рисунке 68 точка N — середина отрезков PK и MT. Докажите, что прямые PT и MK параллельны.

11.2. 1) Параллельны ли прямые m и n, изображенные на рисунке 69?

2) На рисунке 70 AB и CD — диаметры окружности. Докажите, что AC и BD параллельны.

11.3. 1) Параллельны ли прямые a и b, изображенные на рисунке 71?

2) На рисунке 72 $PT=KM$, $PK=TM$. Докажите, что прямые PT и KM параллельны.

11.4. 1) Параллельны ли прямые m и n, изображенные на рисунке 73?

2) На рисунке 74 $AB=CD$, $BC=AD$. Докажите, что прямые AB и CD параллельны.

11.5. 1) Параллельны ли прямые a и b, b и c, a и c, изображенные на рисунке 75?

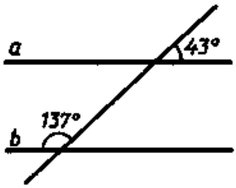

Рис. 67

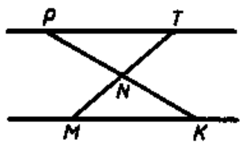

Рис. 68

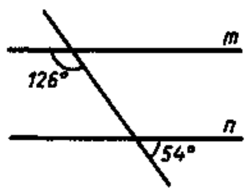

Рис. 69

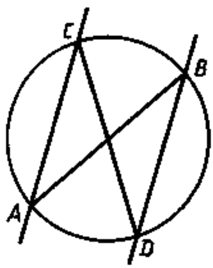

Рис. 70

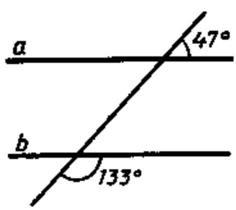

Рис. 71

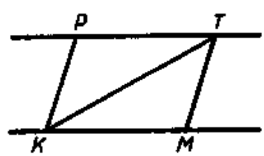

Рис. 72

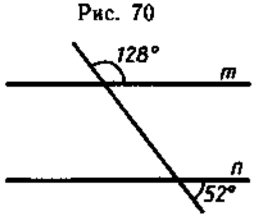

Рис. 73

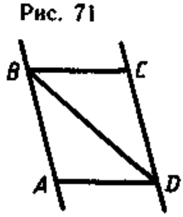

Рис. 74

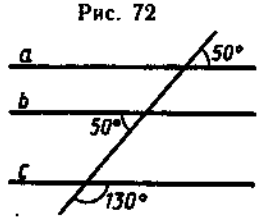

Рис. 75

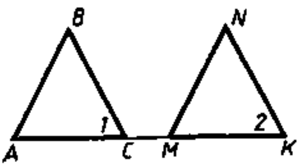

Рис. 76

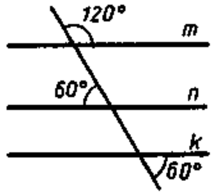

Рис. 77

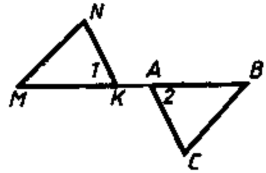

Рис. 78

2) На рисунке 76 $\angle 1 = \angle 2$, $AC = MK$, $BC = NK$. Докажите, что прямые AB и MN параллельны.

11.6. 1) Параллельны ли прямые m и n, m и k, n и k, изображенные на рисунке 77?

2) На рисунке 78 $\angle 1 = \angle 2$, $MK = AB$, $NK = AC$. Докажите, что прямые NM и BC параллельны.

§ 12. СВОЙСТВА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРЯМЫХ

12.1. 1) На рисунке 79 прямые m и n параллельны, $\angle 1 = 65°$. Найдите углы 2 и 3.

2) Через вершину A треугольника ABC с прямым углом C проведена прямая, параллельная стороне BC. Найдите угол B треугольника, если $\angle CAB = 43°$.

12.2. 1) На рисунке 80 прямые a и b параллельны, $\angle 1 = 132°$. Найдите углы 2 и 3.

2) Через вершину M треугольника MKP с прямым углом K проведена прямая, параллельная стороне KP. Найдите угол M треугольника, если $\angle P = 57°$.

12.3. 1) На рисунке 81 прямые m и n параллельны, $\angle 1 = 140°$. Найдите углы 2 и 3.

2) Дан угол ABC, равный 76°. Через точку A проведена прямая, параллельная прямой BC и пересекающая биссектрису угла в точке M. Найдите углы треугольника ABM.

12.4. 1) На рисунке 82 прямые a и b параллельны, $\angle 1 = 74°$. Найдите углы 2 и 3.

2) Через точку M биссектрисы угла ABC, равного 94°, проведена прямая, параллельная прямой AB и пересекающая сторону BC в точке K. Найдите углы треугольника BMK.

Рис. 79

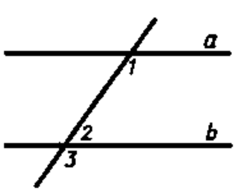

Рис. 80

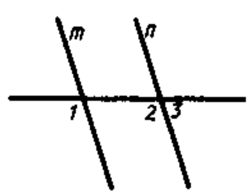

Рис. 81

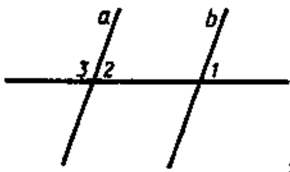

Рис. 82

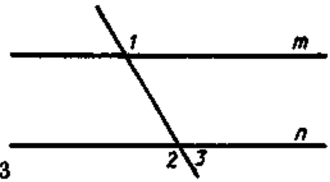

Рис. 83

12.5. 1) На рисунке 83 прямые m и n параллельны, $\angle 1 = 111°$. Найдите углы 2 и 3.

2) Внутри угла ABC проведены параллельные лучи AM и CK. Найдите угол ABC, если $\angle MAB = 140°$, $\angle KCB = 131°$.

12.6. 1) На рисунке 84 прямые a и b параллельны, $\angle 1 = 131°$. Найдите углы 2 и 3.

2) Вне угла MOP проведены параллельные лучи MT и PK. Найдите угол MOP, если $\angle OMT = 15°$, $\angle OPK = 31°$.

12.7*. На рисунке 85 $AB = BC$, $ED = AE$, $\angle C = 80°$, $\angle DAC = 40°$. Докажите, что прямые ED и AC параллельны. Найдите угол BED.

12.8*. На рисунке 86 $PN = NT$, PK — биссектриса угла MPT, $\angle NPT = 70°$, $\angle PKM = 55°$. Докажите, что прямые PT и MK параллельны. Найдите угол PKT.

§ 13. ПРАКТИЧЕСКИЕ СПОСОБЫ ПОСТРОЕНИЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРЯМЫХ. ПРИЗНАКИ И СВОЙСТВА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРЯМЫХ

13.1. 1) Начертите произвольную прямую a и две точки M и K по одну сторону от нее. С помощью чертежного угольника и линейки через каждую из точек M и K проведите прямую, параллельную прямой a.

2) На рисунке 87 $\angle 1 = 67°$, $\angle 2 = 127°$, $\angle 4 = 67°$. Найдите угол 3.

13.2. 1) Начертите произвольную прямую m и две точки A и B по разные стороны от нее. С помощью чертежного угольника и линейки через каждую из точек A и B проведите прямую, параллельную прямой m.

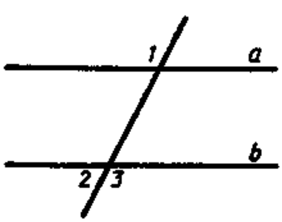

Рис. 84

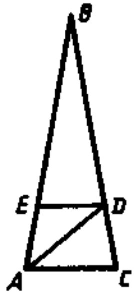

Рис. 85

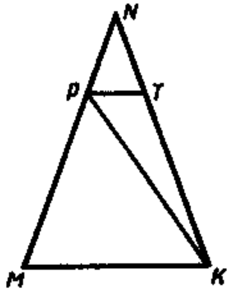

Рис. 86

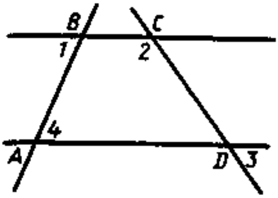

Рис. 87

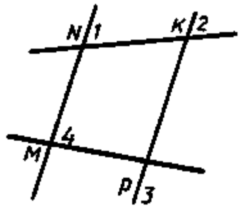

Рис. 88

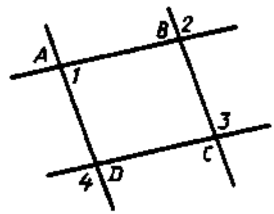

Рис. 89

2) На рисунке 88 $\angle 1 = 73°$, $\angle 3 = 92°$, $\angle 2 = 73°$. Найдите угол 4.

13.3. 1) Начертите произвольную прямую a и две точки M и K по одну сторону от нее. С помощью циркуля и линейки через каждую из точек M и K проведите прямую, параллельную прямой a.

2) На рисунке 89 $\angle 1 = 82°$, $\angle 2 = 98°$, $\angle 4 = 102°$. Найдите угол 3.

13.4. 1) Начертите произвольную прямую n и две точки A и B по разные стороны от нее. С помощью циркуля и линейки через каждую из точек A и B проведите прямую, параллельную прямой n.

2) На рисунке 90 $\angle 1 = 63°$, $\angle 2 = 77°$, $\angle 4 = 117°$. Найдите угол 3.

13.5. 1) Начертите произвольный треугольник ABC и выберите внутри его произвольную точку A_1. Постройте треугольник $A_1B_1C_1$, равный данному треугольнику, так, чтобы его стороны были соответственно параллельны сторонам данного треугольника. (Рассмотрите один из возможных случаев.)

2) На рисунке 91 $\angle 1 = 51°$, $\angle 2 = 129°$, $\angle 3 = 52°$, BE — биссектриса угла ABC. Найдите угол 4.

13.6. 1) Начертите произвольный треугольник HFE и выберите вне его произвольную точку H_1. Постройте треугольник $H_1F_1E_1$, равный данному треугольнику, так, чтобы его стороны были соответственно параллельны сторонам данного треугольника. (Рассмотрите один из возможных случаев.)

2) На рисунке 92 $\angle 1 = \angle 3 = 68°$, $\angle 2 = 112°$, PT — биссектриса угла MPK. Найдите угол 4.

13.7*. На отрезке AB взята точка C; через точки A и B проведены по одну сторону от AB параллельные лучи. На них от-

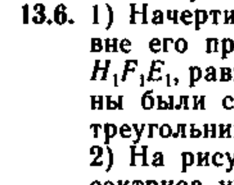

Рис. 90

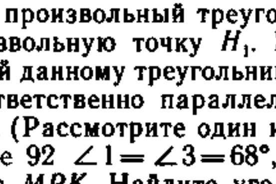

Рис. 91

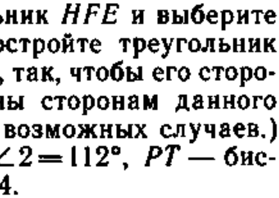

Рис. 92

ложены отрезки $AD=AC$ и $BE=BC$, точка C соединена отрезками с точками D и E. Докажите, что $DC \perp CE$.

13.8*. Через точку O, расположенную внутри треугольника ABC, проведена прямая DE, параллельная стороне AC и пересекающая стороны AB и BC соответственно в точках D и E. $AD=DO$ и $CE=EO$. Докажите, что BO — биссектриса угла ABC.

СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ ТРЕУГОЛЬНИКА

§ 14. СУММА УГЛОВ ТРЕУГОЛЬНИКА

14.1. 1) В треугольнике ABC проведена биссектриса AK. Найдите угол B, если $\angle C=33°$, $\angle AKC=110°$.

2) Внешний угол при основании равнобедренного треугольника равен 100°. Найдите угол при основании, не смежный с данным внешним углом.

14.2. 1) Отрезок BK является биссектрисой треугольника ABC, $\angle A=68°$, $\angle BKA=81°$. Найдите угол C треугольника.

2) Угол при основании равнобедренного треугольника равен 70°. Чему равен внешний угол при основании треугольника, не смежный с данным углом?

14.3. 1) В равнобедренном треугольнике ABC с основанием BC $\angle A=54°$. Найдите угол HBC, где BH — высота треугольника.

2) Внешний угол при основании равнобедренного треугольника на 20° больше одного из углов при основании треугольника. Найдите углы при основании.

14.4. 1) В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC $\angle B=64°$. Найдите угол AMC, где CM — биссектриса треугольника.

2) Один из углов при основании равнобедренного треугольника на 40° меньше внешнего угла при основании. Найдите внешний угол при основании.

14.5. 1) В треугольнике ABC биссектрисы AK и BM пересекаются в точке O. Найдите угол C треугольника, если $\angle KOB=70°$.

2) В треугольнике ABC точка D лежит на стороне BC, причем $AD=DC$. Сумма внешних углов при вершине A равна 160°. Найдите угол C, если AD — биссектриса угла BAC.

14.6. 1) В треугольнике ABC высоты AK и BM пересекаются в точке O. Найдите угол AOB, если углы A и B треугольника равны соответственно 72° и 60°.

2) В треугольнике LKM точка P лежит на стороне LM, причем $KP=PM$, $\angle M=40°$. Найдите сумму внешних углов при вершине K, если KP — биссектриса угла LKM.

14.7*. Найдите угол x на рисунке 93.

14.8*. Найдите угол x на рисунке 94.

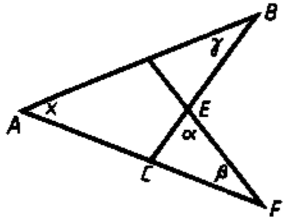

Рис. 93

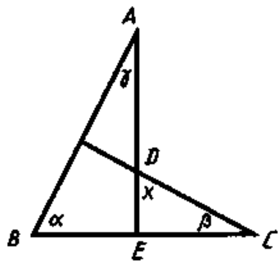

Рис. 94

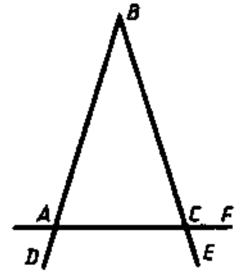

Рис. 95

§ 15. СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ ТРЕУГОЛЬНИКА

15.1. 1) В треугольнике ABC биссектриса угла C пересекает сторону AB в точке D, $AD=DC$, $\angle A=40°$. Докажите, что $AB>BC$.

2) На рисунке 95 $\angle DAC=106°$, $\angle FCE=74°$, $AB=12$ см. Найдите BC.

15.2. 1) В треугольнике ABC угол ABC равен 70°. Биссектриса этого угла пересекает сторону AC в точке D, $BD=DC$. Докажите, что $AB<AC$.

2) На рисунке 96 $\angle NML=65°$, $\angle MKP=115°$, $HK=7$ дм. Найдите MH.

15.3. 1) На рисунке 97 $AB=BC$, $\angle 1=\angle 2$. Докажите, что $AD=DC$.

2) В треугольнике ABC точка K лежит на стороне AC, $\angle BCA=107°$, $BK=4{,}5$, $AB<6$. Найдите AB, если известно, что длина AB выражается целым числом.

15.4. 1) На рисунке 98 $EF=FC$, $\angle 1=\angle 2$. Докажите, что $DE=DC$.

2) В треугольнике DEM точка F лежит на стороне DE, $\angle DEM=115°$, $DM=14$, $FM>12{,}5$. Найдите FM, если известно, что длина FM выражается целым числом.

15.5. 1) В треугольнике ABC точки D и E лежат соответственно на сторонах AB и BC, причем $AD=CE$ и $AE=CD$. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

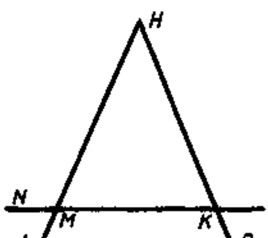

Рис. 96

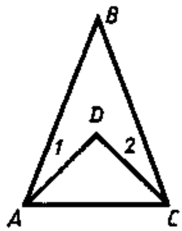

Рис. 97

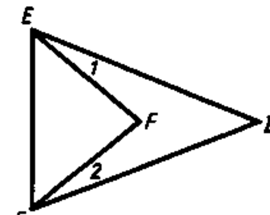

Рис. 98

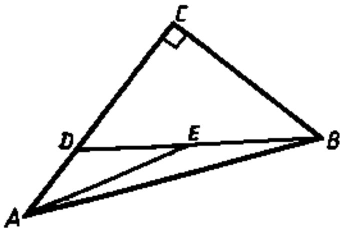

Рис. 99

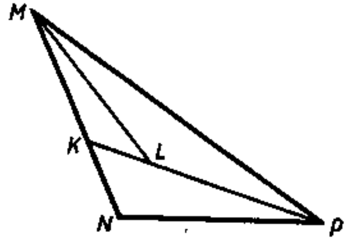

Рис. 100

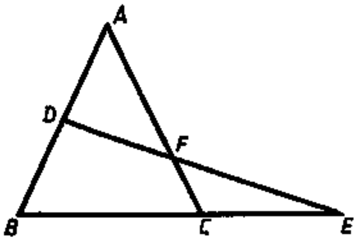

Рис. 101

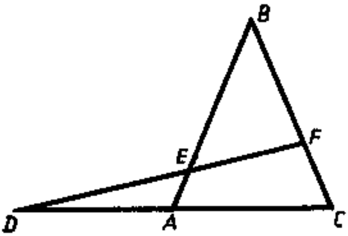

Рис. 102

2) На рисунке 99 угол C прямой, а D — произвольная точка стороны AC. Докажите, что $AB > AE$.

15.6. 1) В треугольнике ABC точки F и M лежат соответственно на сторонах AB и BC, причем $CF = AM$, а $\angle MAC = \angle FCA$. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

2) На рисунке 100 $\angle N$ тупой, а K — произвольная точка стороны MN. Докажите, что $ML < PM$.

15.7*. На рисунке 101 $AB = AC$. Докажите, что $AF > AD$.

15.8*. На рисунке 102 $AB = BC$. Докажите, что $BF < EB$.

§ 16. НЕРАВЕНСТВО ТРЕУГОЛЬНИКОВ

16.1. 1) Могут ли стороны треугольника относиться как 2:3:6?

2) Боковые стороны равнобедренного треугольника равны 10. Может ли основание быть равным 20,01?

16.2. 1) Могут ли стороны треугольника относиться как 3:5:8?

2) Основание равнобедренного треугольника равно 29,9. Могут ли боковые стороны быть равными 15?

16.3. 1) Длина одного отрезка на 1 см больше второго и на 4 см больше третьего. Могут ли эти отрезки быть сторонами треугольника, периметр которого равен 10 см?

2) В равнобедренном треугольнике ABC основание AC равно 1, $\angle A = 15°$. Докажите, что $1 < 2AB < 2$.

16.4. 1) Существует ли такой треугольник, у которого одна сторона на 4 дм меньше второй и на 1 дм меньше третьей, а периметр равен 14 дм?

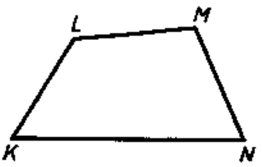

Рис. 103

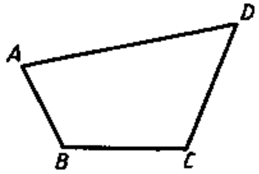

Рис. 104

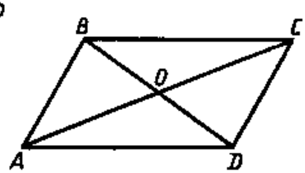

Рис. 105

2) В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC сторона AB равна 1, $\angle C=45°$. Докажите, что $\frac{1}{2}<\frac{AC}{2}<1$.

16.5. 1) В равнобедренном треугольнике периметр равен 120 мм, а одна из его сторон 28 мм. Найдите длину остальных сторон треугольника.

2) Докажите, что $KL+LM+MN>KN$ (рис. 103).

16.6. 1) В равнобедренном треугольнике периметр равен 60 дм, а одна из его сторон 25 дм. Найдите длины остальных сторон треугольника.

2) Докажите, что $AD<AB+BC+CD$ (рис. 104).

16.7*. На рисунке 105 $BO=OD$ и $AO=OC$. Докажите, что $CO<\frac{BC+CD}{2}$.

16.8*. На рисунке 106 $BO=OD$ и $AO=OC$. Докажите, что $BO<\frac{BA+BC}{2}$.

§ 17. СВОЙСТВА ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

17.1. 1) На рисунке 107 $\angle ABD=\angle CDB=90°$, $AD=BC$. Докажите, что $AB=CD$.

2) Один из углов прямоугольного треугольника равен 60°, а разность гипотенузы и меньшего катета равна 4 см. Найдите эти стороны треугольника.

17.2. 1) На рисунке 108 $PO=OM$, $\angle PKO=\angle MTO=90°$. Докажите, что $PK=MT$.

2) Один из углов прямоугольного треугольника равен 30°, а сумма гипотенузы и меньшего катета равна 36 см. Найдите эти стороны треугольника.

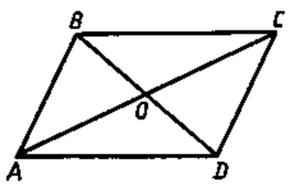

Рис. 106

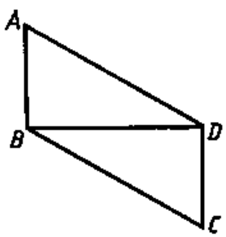

Рис. 107

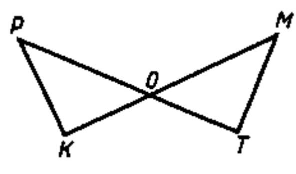

Рис. 108

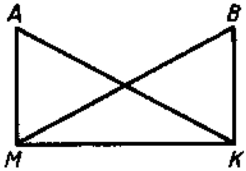

Рис. 109

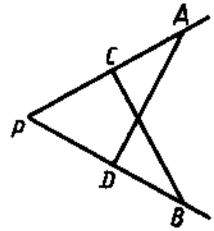

Рис. 110

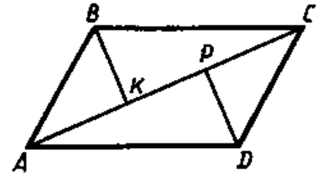

Рис. 111

17.3. 1) На рисунке 109 $\angle AMK = \angle BKM = 90°$, $AK = BM$. Докажите, что $AM = BK$.

2) Один из внешних углов прямоугольного треугольника равен 120°. Найдите большую и меньшую стороны треугольника, если их сумма равна 18 см.

17.4. 1) На рисунке 110 $PA = PB$, $BC \perp PA$, $AD \perp PB$. Докажите, что $PD = PC$.

2) В треугольнике ABC $\angle A = 90°$, а внешний угол при вершине B равен 150°. Найдите CB и AC, если $CB - AC = 10$ см.

17.5. 1) На рисунке 111 $AB = CD$, $BC = AD$, $\angle AKB = \angle CPD = 90°$. Докажите, что $KB = DP$.

2) В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой BC и углом B, равным 60°, проведена высота AD. Найдите DC, если $DB = 2$ см.

17.6. 1) На рисунке 112 $AB = CD$, $\angle APB = \angle CTD = 90°$, $AP = CT$. Докажите, что $BC = AD$.

2) В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой AC, равной 12 см, проведена высота BD. Найдите CD и DA, если $\angle A = 30°$.

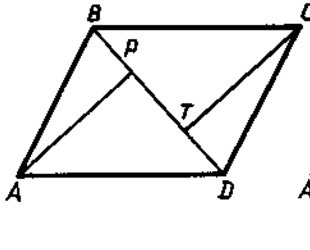

Рис. 112

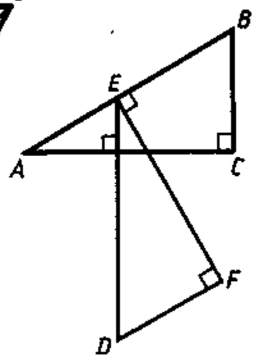

Рис. 113

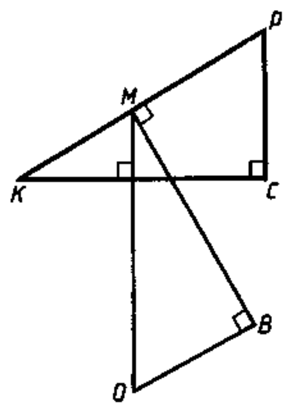

Рис. 114

17.7*. 1) В равнобедренном треугольнике один из углов 120°, а основание равно 10 см. Найдите высоту, проведенную к боковой стороне.
2) На рисунке 113 $ED=AB$. Периметр треугольника ABC равен 12 см. Найдите периметр треугольника DEF.

17.8*. 1) В равнобедренном треугольнике один из внешних углов равен 60°, высота, проведенная к боковой стороне, равна 17 см. Найдите основание треугольника.
2) На рисунке 114 $MB=KC$, $KP-PC=10$ см. Найдите разность длин отрезков OM и OB.

§ 18. РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПРЯМОЙ И РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПРЯМЫМИ

18.1. 1) В прямоугольном треугольнике ABC $\angle B=90°$, $AB=4$ см, $CB=7$ см. Найдите расстояние:
а) от точки A до прямой BC;
б) от точки C до прямой AB.
Может ли расстояние от точки B до прямой AC быть равным 5 см?
2) Проведите прямую и с помощью чертежного угольника и масштабной линейки постройте прямые, удаленные от нее на расстояние, равное 3 см.

18.2. 1) В прямоугольном треугольнике ABC $\angle A=90°$, $AB=6$ см, $AC=10$ см. Найдите расстояние:
а) от точки B до прямой AC;
б) от точки C до прямой AB.
Может ли расстояние от точки A до прямой BC быть равным 8 см?
2) Проведите прямую и с помощью чертежного угольника и масштабной линейки постройте прямые, удаленные от нее на расстояние, равное 5 см.

18.3. 1) В прямоугольном треугольнике ABC $AB=6$ см, $AC=8$ см, $BC=10$ см. Найдите расстояние:
а) от точки B до прямой AC;
б) от точки C до прямой AB.
Может ли расстояние от точки A до прямой CB быть равным 7 дм?
2) На прямой a с помощью чертежного угольника и масштабной линейки постройте точки, удаленные от прямой b на расстояние, равное длине заданного отрезка PQ (рис. 115).

18.4. 1) В прямоугольном треугольнике ABC $AB=24$ см, $AC=25$ см, $BC=7$ см. Найдите расстояние:
а) от точки A до прямой BC;
б) от точки C до прямой AB.
Может ли расстояние от точки B до прямой AC быть равным 10 см?

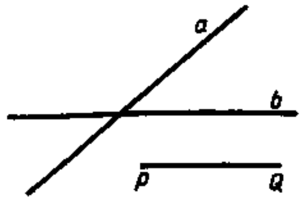

Рис. 115

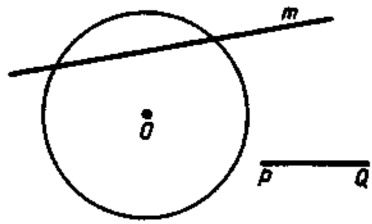

Рис. 116

2) На окружности с помощью чертежного угольника и масштабной линейки постройте точки, удаленные от прямой m на расстояние, равное длине заданного отрезка PQ (рис. 116).

18.5. 1) Точки A и B лежат по разные стороны от прямой a. Расстояние от точки A до этой прямой равно 6 см, а от точки B — 4 см. Может ли расстояние между точками A и B быть равным 8 см?

2) Дан треугольник ABC (рис. 117). С помощью чертежного угольника и масштабной линейки постройте равнобедренный треугольник с основанием AC и вершиной, удаленной от прямой AC на то же расстояние, что и вершина B данного треугольника.

18.6. 1) Точки M и K лежат по разные стороны от прямой p. Расстояние от точки M до этой прямой равно 8 см, а от точки K — 10 см. Может ли расстояние между точками M и K быть равным 17 см?

2) Дан треугольник EHM (рис. 118). С помощью чертежного угольника и масштабной линейки постройте равнобедренный треугольник с основанием EM и вершиной, удаленной от прямой EM на то же расстояние, что и вершина H данного треугольника.

18.7*. Точки A и B лежат по разные стороны от прямой a. Перпендикуляры AP и BM к прямой a равны. Отрезки AB и MP пересекаются в точке K. Докажите, что точка K делит каждый из них пополам.

18.8*. Точки A и B лежат по одну сторону от прямой a. Перпендикуляры AM и BK к прямой a равны. Отрезки AK и BM пересекаются в точке O. Докажите, что точка O равноудалена от точек A, M, K и B.

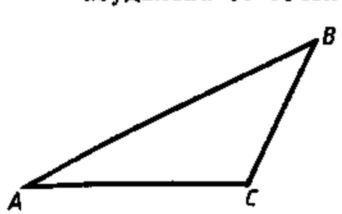

Рис. 117

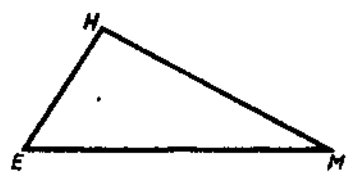

Рис. 118

§ 19. СВОЙСТВА СЕРЕДИННОГО ПЕРПЕНДИКУЛЯРА И БИССЕКТРИСЫ УГЛА

19.1. 1) На серединном перпендикуляре отрезка AB взята точка M. Периметр треугольника AMB равен 42 см. Найдите длину отрезка AB, если AM в 3 раза больше AB.

2) Постройте точку на катете прямоугольного треугольника, равноудаленную от гипотенузы и другого катета.

19.2. 1) На серединном перпендикуляре отрезка MK взята точка P. Найдите длину отрезка PM, если она на 3 см больше длины отрезка MK, а периметр треугольника PMK равен 96 см.

2) Постройте точку на боковой стороне равнобедренного треугольника, равноудаленную от основания и другой боковой стороны.

19.3. 1) В равнобедренном треугольнике ABC с основанием BC серединный перпендикуляр стороны AC пересекает сторону BC в точке M. Найдите $\angle CAM$, если $\angle ABC=43°$.

2) В прямоугольном треугольнике ABC $(\angle C=90°)$ $BC<AC$. Постройте точку, равноудаленную от сторон AB и AC и находящуюся от вершины C на расстоянии, равном длине катета BC.

19.4. 1) В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC серединный перпендикуляр стороны AB пересекает основание AC в точке P. Найдите угол C, если $\angle ABP=52°$.

2) Дан равнобедренный остроугольный треугольник ABC $(AB=BC)$. Постройте точку, равноудаленную от AB и AC и находящуюся от вершины C на расстоянии, равном половине длины основания AC.

19.5. 1) В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AB серединный перпендикуляр стороны AC пересекает сторону BC в точке M. Найдите угол MAB, если $\angle ACB=40°$.

2) В прямоугольном треугольнике ABC $(\angle C=90°)$ постройте точку, равноудаленную от AB и AC и находящуюся на равном расстоянии от вершин A и B.

19.6. 1) В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC серединный перпендикуляр стороны AB пересекает сторону BC в точке P. Найдите угол PAC, если $\angle BCA=65°$.

2) В равнобедренном треугольнике CDE $(CD=DE)$ постройте точку, равноудаленную от CE и DE и находящуюся на равном расстоянии от вершин D и E.

19.7*. 1) В равнобедренном треугольнике ABC $(AB=BC)$ угол при основании равен 75°, AM — биссектриса треугольника, $BM=10$ см. Найдите расстояние от точки M до основания треугольника AC.

2) Найдите множество вершин C равнобедренных треугольников ABC с основанием AB, равным заданному отрезку.

19.8*. 1) В равнобедренном треугольнике ABC $(AB=BC)$ угол при вершине B равен 120°, CM — биссектриса, $AM=$

$=14$ см. Найдите расстояние от точки M до прямой BC.
2) Даны прямая a и отрезок BC, не имеющий общих точек с этой прямой. На прямой a найдите такую точку A, что треугольник ABC с основанием BC будет равнобедренным.

§ 20. ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

20.1. 1) Постройте треугольник по стороне и прилежащим к ней острому и тупому углам (сумма этих углов меньше 180°).
2) Постройте равнобедренный треугольник, если его основание и боковая сторона равны соответственно двум данным отрезкам PQ и P_1Q_1 $\left(P_1Q_1 > \frac{1}{2}PQ\right)$.

20.2. 1) Постройте треугольник по двум сторонам и тупому углу между ними.
2) Постройте равносторонний треугольник, если его стороны равны данному отрезку.

20.3. 1) Начертите треугольник ABC и постройте треугольник, у которого $\angle P = \angle A$, $\angle K = \angle B$ и $PK = 2AB$.
2) Дан остроугольный разносторонний треугольник ABC. Постройте треугольник CDA, равный треугольнику ABC, так, чтобы вершины B и D лежали по одну сторону от прямой AC.

20.4. 1) Постройте равнобедренный треугольник по боковой стороне, в 2 раза большей длины данного отрезка, и по углу, противолежащему основанию и равному данному тупому углу.
2) Дан треугольник ABC с тупым углом A. Постройте треугольник ADC, равный треугольнику ABC, так, чтобы вершины B и D лежали по разные стороны от прямой AC.

20.5. 1) Постройте треугольник ABC, у которого угол A вдвое меньше угла B и равен данному углу P, а сторона AB равна данному отрезку DE.
2) Заданы отрезок AB и прямая a (рис. 119). Постройте треугольник ABC со стороной AB так, чтобы вершина C лежала на прямой a и чтобы $AC = 2AB$.

20.6. 1) Постройте треугольник ABC, у которого сторона AC вдвое меньше стороны AB и равна данному отрезку DE, а угол A равен половине данного угла P.

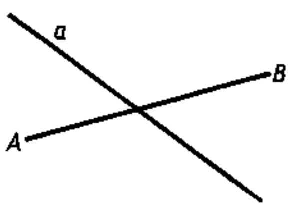

Рис. 119

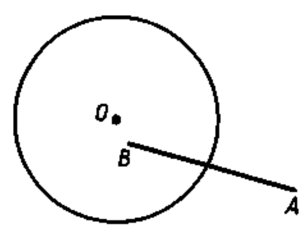

Рис. 120

2) Заданы отрезок AB и окружность с центром O (рис. 120). Постройте треугольник ABC со стороной AB так, чтобы вершина C лежала на окружности с центром O и чтобы сторона AC равнялась радиусу этой окружности.

§ 21. ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

21.1. 1) Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и острому углу.

2) Постройте треугольник ABC так, чтобы $AB=PQ$, $BC=P_1Q_1$, $CH=P_2Q_2$, где CH — высота треугольника, а PQ, P_1Q_1 и P_2Q_2 — заданные отрезки, причем $P_1Q_1>P_2Q_2$.

21.2. 1) Постройте прямоугольный треугольник по катету и прилежащему к нему острому углу.

2) Постройте треугольник MNK так, чтобы $MN=PQ$, $MK=P_1Q_1$, $MH=P_2Q_2$, где MH — высота треугольника, а PQ, P_1Q_1 и P_2Q_2 — заданные отрезки, причем $P_1Q_1>PQ>P_2Q_2$.

21.3. 1) Постройте равнобедренный треугольник по основанию и высоте, проведенной к основанию.

2) Постройте треугольник DEF так, чтобы угол E был равен заданному тупому углу, $EF=PQ$, $DH=P_1Q_1$, где DH — высота треугольника, а PQ и P_1Q_1 — заданные отрезки, причем $PQ>P_1Q_1$.

21.4. 1) Постройте равнобедренный треугольник по основанию и медиане, проведенной к основанию.

2) Постройте треугольник ABC так, чтобы угол C был равен заданному острому углу, $AC=PQ$, $BH=P_1Q_1$, где BH — высота треугольника, а PQ и P_1Q_1 — заданные отрезки, причем $PQ<P_1Q_1$.

21.5. 1) Постройте прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C по стороне AC и медиане AM.

2) Постройте равнобедренный треугольник по углу при основании и высоте, проведенной к боковой стороне.

21.6. 1) Постройте прямоугольный треугольник ABC, где угол B равен 90°, по стороне BC и биссектрисе CM.

2) Постройте треугольник по острому углу и двум высотам, проведенным к сторонам, образующим данный угол.

21.7*. 1) Постройте треугольник ABC так, чтобы угол B равнялся данному острому углу, а BA и $BC+CA$ соответственно двум данным отрезкам PQ и P_1Q_1 ($PQ<P_1Q_1$).

2) Постройте треугольник ABC по стороне BC, медиане BM и высоте BH ($BC>BH$, $BM>BH$).

21.8*. 1) Постройте треугольник ABC так, чтобы угол A равнялся данному острому углу, а AB и $AC-BC$ соответственно двум данным отрезкам PQ и P_1Q_1 ($PQ>P_1Q_1$).

2) Постройте треугольник ABC по сторонам AC и BC и медиане CM.

22.1. В треугольнике ABC $\angle A=50°$, $\angle B=80°$, BF — биссектриса внешнего угла EBC.

1) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

2) Докажите, что BF параллельна AC.

3) Докажите, что $AM=BC$, если медиана CO продолжена на отрезок OM, равный CO.

4) Верно ли, что $\angle OCA=\angle OCB$?

22.2. В треугольнике EMK $\angle M=40°$, $\angle K=70°$, MC — луч, принадлежащий внутренней области внешнего угла PMK, причем $MC \parallel EK$.

1) Докажите, что треугольник EMK равнобедренный.

2) Докажите, что MC — биссектриса угла PMK.

3) Докажите, что равны высоты треугольника EB и KA.

4) Верно ли, что $MB=BK$?

22.3. На рисунке 121 в четырехугольнике $ABCD$ $\angle ADB= =\angle DBC=90°$, $AD=BC$, $\angle ABD=60°$.

1) Докажите, что AB параллельна CD.

2) Докажите, что $4<AD<8$, если длина отрезка BD равна 4.

3) Докажите, что треугольник AED равнобедренный, если DE — медиана треугольника ADB.

22.4. На рисунке 122 в четырехугольнике $EMKP$ $\angle EPM= =\angle PMK=90°$, $\angle MEP=\angle MKP=30°$.

1) Докажите, что EM параллельна PK.

2) Докажите, что $5<EP<10$, если длина отрезка ME равна 10.

3) Найдите длину медианы MD в треугольнике PMK.

22.5. На рисунке 123 в четырехугольнике $ABCD$ $AB=BC= =CD=DA$.

1) Докажите, что AB параллельна CD и AD параллельна BC.

2) Докажите, что $BF=DF$.

3) Докажите, что $BD \perp AC$.

4) Докажите, что точка F равноудалена от AB и AD.

22.6. На рисунке 124 в четырехугольнике $KLMP$ $KL=LM= =MP=PK$.

1) Докажите, что LM параллельна KP и KL параллельна PM.

2) Докажите, что $LO=OP$.

3) Докажите, что $KA=AM$, где A — точка пересечения KM и LP.

4) Докажите, что точка O равноудалена от KL и KP.

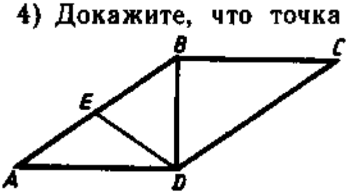

Рис. 121

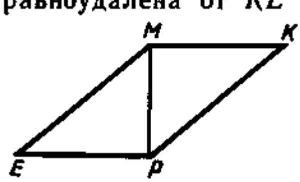

Рис. 122

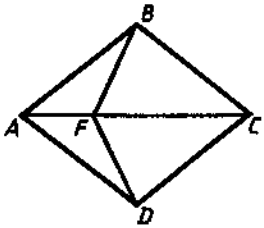

Рис. 123

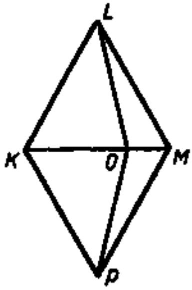

Рис. 124

МНОГОУГОЛЬНИКИ

§ 23. МНОГОУГОЛЬНИКИ. СУММА УГЛОВ

23.1. 1) Найдите сумму углов выпуклого семиугольника.
2) Сколько углов имеет выпуклый многоугольник, каждый угол которого равен 135°?

23.2. 1) Все углы выпуклого восьмиугольника равны. Найдите их.
2) Сколько углов имеет выпуклый многоугольник, если их сумма равна 1620°?

23.3. 1) На сколько сумма углов выпуклого восьмиугольника больше суммы углов выпуклого четырехугольника?
2) Существует ли выпуклый многоугольник, каждый угол которого равен 165°?

23.4. 1) Во сколько раз сумма углов выпуклого десятиугольника больше суммы углов выпуклого шестиугольника?
2) Существует ли выпуклый многоугольник, сумма углов которого равна 1980°?

23.5. 1) Сколько сторон имеет выпуклый многоугольник, сумма углов которого вдвое больше суммы углов выпуклого девятиугольника?
2) В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ биссектрисы углов A и B пересекаются в точке O (рис. 125). Докажите,

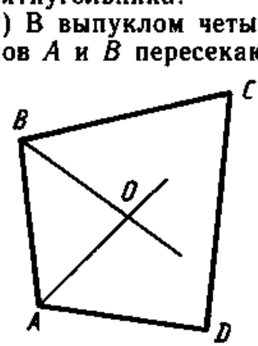

Рис. 125

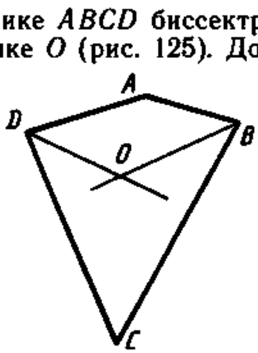

Рис. 126

что угол между биссектрисами этих углов равен полусумме углов C и D ($\angle C + \angle D \leqslant 180°$).

23.6. 1) Сколько сторон имеет выпуклый многоугольник, если каждый его угол на 18° больше каждого угла выпуклого четырехугольника с равными углами?

2) В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ биссектрисы углов B и D пересекаются в точке O (рис. 126). Докажите, что угол между биссектрисами этих углов равен полуразности углов A и C ($\angle A > \angle C$).

23.7*. Докажите, что у выпуклого шестиугольника с равными углами стороны попарно параллельны.

23.8*. Докажите, что у выпуклого пятиугольника с равными углами нет параллельных сторон.

§ 24. ПАРАЛЛЕЛОГРАММ. СВОЙСТВА ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

24.1. 1) На рисунке 127 $MNKP$ — параллелограмм, MT — биссектриса угла NMP, $NT = 6$ см, $TK = 4$ см. Найдите периметр параллелограмма.

2) Сумма трех углов параллелограмма равна 252°. Найдите углы параллелограмма.

24.2. 1) На рисунке 128 $ABCD$ — параллелограмм, DE — биссектриса угла ADC, $CD = 8$ см, $BE = 12$ см. Найдите периметр параллелограмма.

2) В параллелограмме один из углов в 2 раза больше другого. Найдите углы параллелограмма.

24.3. 1) На рисунке 129 $MNKP$ — параллелограмм, MT — биссектриса угла NMP, PT — биссектриса угла MPK, $MN = 8$ см. Найдите периметр параллелограмма.

2) Один из углов параллелограмма на 24° больше другого. Найдите углы параллелограмма.

24.4. 1) На рисунке 130 $ABCD$ — параллелограмм, $AB = AE$, $\angle BEA = 70°$. Найдите углы параллелограмма.

2) Диагонали параллелограмма $MNKP$ пересекаются в точке O. Найдите периметр треугольника ONK, если $MK = 18$ см, $OP = 5$ см, $MP = 11$ см.

24.5. 1) Вне параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, параллельная диагонали AC и пересекающая продолжения

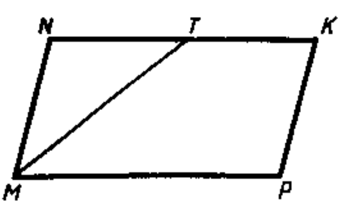

Рис. 127

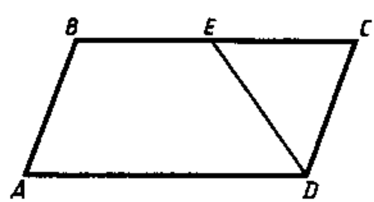

Рис. 128

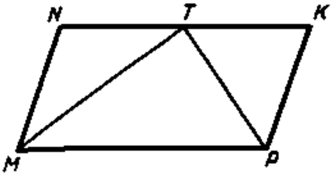

Рис. 129

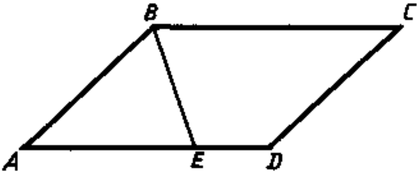

Рис. 130

сторон AB, CD, AD и BC соответственно в точках E, F, K и L. Докажите, что $EK=FL$.

2) Из вершины A острого угла параллелограмма проведены перпендикуляры AH_1 и AH_2 к прямым BC и CD. Найдите углы параллелограмма, если $\angle H_1AH_2=130°$.

24.6. 1) Проведена прямая, параллельная диагонали BD параллелограмма $ABCD$ и пересекающая стороны AB и AD соответственно в точках E и F и продолжения сторон BC и CD соответственно в точках M и P. Докажите, что $ME=FP$.

2) Из вершины M тупого угла параллелограмма $MNKP$ проведены перпендикуляры MH_1 и MH_2 к прямым NK и KP. Найдите углы параллелограмма, если $\angle H_1MH_2=70°$.

§ 25. ПРИЗНАКИ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

25.1. 1) На рисунке 131 $ABCD$ — параллелограмм, $BT=DK$. Докажите, что $ATCK$ — параллелограмм.

2) Диагонали четырехугольника $MNKP$ пересекаются в точке O. Является ли этот четырехугольник параллелограммом, если $MO=7$ см, $MK=1{,}4$ дм, $NO=5$ см, $OP=50$ мм?

25.2. 1) На рисунке 132 $MNKP$ — параллелограмм, $AN=PB$. Докажите, что $AKBM$ — параллелограмм.

2) Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O, причем $OA=0{,}6$ дм, $OB=3$ см, $OC=BD=60$ мм. Является ли этот четырехугольник параллелограммом?

25.3. 1) На рисунке 133 $ABCD$ — параллелограмм, $\angle 1=\angle 2$. Докажите, что $ATCK$ — параллелограмм.

2) Точки A и B делят диагональ MK параллелограмма $MNKF$ на три равные части. Докажите, что $NAPB$ — параллелограмм.

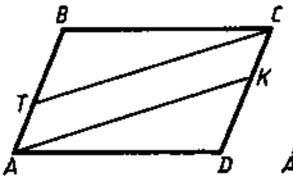

Рис. 131

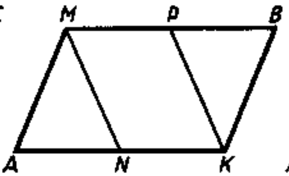

Рис. 132

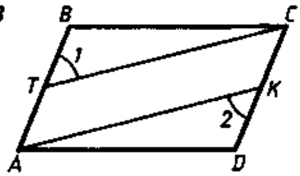

Рис. 133

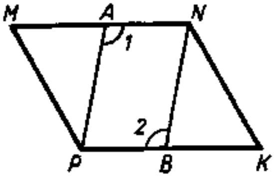

Рис. 134

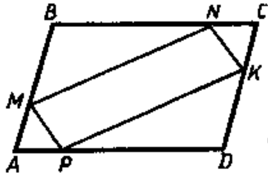

Рис. 135

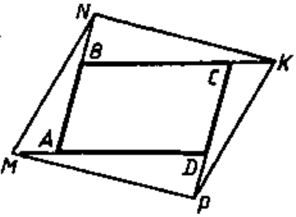

Рис. 136

25.4. 1) На рисунке 134 $MNKP$ — параллелограмм, $\angle 1 = \angle 2$. Докажите, что $ANBP$ — параллелограмм.

2) $ABCD$ — параллелограмм; на прямой BD отмечены точки M и P так, что $BM = DP = BD$. Докажите, что $AMCP$ — параллелограмм.

25.5. 1) На рисунке 135 $ABCD$ — параллелограмм, $AP = AM = CN = CK$. Докажите, что $MNKP$ — параллелограмм.

2) Через середину O диагонали MK параллелограмма $MNKP$ проведена прямая, пересекающая стороны NK и MP соответственно в точках A и B. Докажите, что $MAKB$ — параллелограмм.

25.6. 1) На рисунке 136 $ABCD$ — параллелограмм, $AM = BN = CK = DP$. Докажите, что $MNKP$ — параллелограмм.

2) Через середину диагонали AC параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, пересекающая стороны BC и AD, а также продолжение сторон CD и AB соответственно в точках F и E ($F \in CD$, $E \in AB$). Докажите, что $EAFC$ — параллелограмм.

25.7*. 1) В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ (рис. 137) $AE \perp BD$, $CF \perp BD$, $AE = CF$, $\angle BAC = \angle ACD$. Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.

2) Постройте параллелограмм $ABCD$ по острому углу A, стороне BC и расстоянию между прямыми AD и BC.

25.8*. 1) В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ (рис. 138) $BE = DF$, $AE \parallel CF$ и $\angle BAD + \angle ADC = 180°$. Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.

2) Постройте параллелограмм $ABCD$ по двум сторонам AD и AB и высоте BE ($BE < AB$).

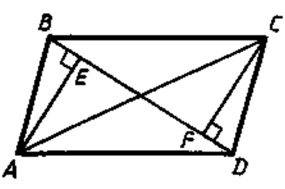

Рис. 137

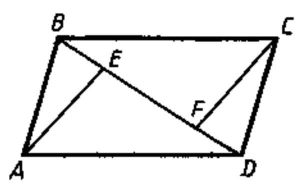

Рис. 138

§ 26. ПРЯМОУГОЛЬНИК. РОМБ. КВАДРАТ

26.1. 1) В ромбе $ABCD$ $\angle A = 36°$. Найдите угол между диагональю BD и стороной DC.

2) Постройте прямоугольник по одной из сторон и углу между этой стороной и диагональю.

26.2. 1) В прямоугольнике $ABCD$ $\angle BAC = 35°$. Найдите угол между диагоналями прямоугольника.

2) Постройте ромб по углу и стороне.

26.3. 1) В ромбе $ABCD$, где угол A острый, BE и BF — высоты. Угол между диагональю BD и высотой BF равен 40°.

а) Докажите, что $BE = BF$.

б) Найдите углы ромба.

2) Постройте прямоугольник по одной из сторон и диагонали.

26.4. 1) В прямоугольнике $ABCD$ AE и CF — перпендикуляры, опущенные из вершин A и C на диагональ BD. Угол между диагоналями равен 30°, $CF = 2$ см.

а) Докажите, что $AE = CF$.

б) Найдите длину диагонали BD.

2) Постройте ромб по стороне и одной из диагоналей.

26.5. 1) В ромбе $ABCD$ биссектриса угла BAC пересекает сторону BC в точке M. Найдите углы ромба, если $\angle AMC = 120°$.

2) Постройте прямоугольник по диагонали и углу между диагоналями.

26.6. 1) Перпендикуляр, опущенный из вершины угла A прямоугольника $ABCD$ на не проходящую через эту вершину диагональ, делит ее в отношении 1:3, считая от вершины B. Диагональ равна 6 см. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей до большей стороны.

2) Постройте ромб по одному из его углов и расстоянию между параллельными сторонами.

26.7*. Внутри квадрата $ABCD$ взята точка K и на отрезке AK как на стороне построен квадрат $AKLM$, у которого сторона KL пересекает сторону AD. Докажите, что отрезки BK и DM равны.

26.8*. $ABCD$ — квадрат, точка M принадлежит стороне CD, AK — биссектриса угла BAM ($K \in BC$). Докажите, что $AM = BK + DM$.

§ 27. ТРАПЕЦИЯ. ОСЕВАЯ И ЦЕНТРАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ

27.1. 1) В трапеции $ABCD$ AD — большее основание. Через вершину B проведена прямая, параллельная CD, до пересечения с AD в точке E. Периметр треугольника ABE равен 17 см, а $BC = 3$ см. Найдите периметр трапеции.

2) Постройте точки B_1 и C_1, симметричные вершинам B и C треугольника ABC относительно вершины A. Докажите, что BCB_1C_1 — параллелограмм.

27.2. 1) В трапеции $MNPK$ MK — большее основание. Через вершину N проведена прямая, параллельная PK, до пересечения с MK в точке F, $\angle NMF = 40°$, $\angle MNF = 75°$. Найдите углы трапеции.

2) Постройте точку P_1, симметричную вершине P треугольника MKP относительно прямой MK. Докажите, что треугольники MKP и MKP_1 равны. Докажите, что если треугольник MKP равнобедренный ($MP = KP$), то PMP_1K — ромб.

27.3. 1) В равнобедренной трапеции $ABCD$ $\angle A = 30°$, $\angle ACD = 135°$, $AD = 20$ см, $BC = 10$ см.

а) Докажите, что AC — биссектриса угла BAC.

б) Найдите периметр трапеции.

2) Даны две взаимно перпендикулярные прямые a и b, пересекающиеся в точке O, и некоторая точка A, не принадлежащая этим прямым. Точки A_1 и A_2 симметричны точке A соответственно относительно осей a и b. Докажите, что точки A_1 и A_2 симметричны относительно центра O.

27.4. 1) В прямоугольной трапеции $ABCD$ $\angle BAD$ прямой, $\angle BAC = 45°$, $\angle BCD = 135°$, $AD = 30$ см.

а) Найдите меньшую боковую сторону трапеции.

б) Назовите три равных треугольника, из которых составлена эта трапеция.

2) На некоторой прямой a выбрана точка O. Точка A не принадлежит этой прямой. Точка A_1 симметрична точке A относительно центра O, а точка A_2 симметрична точке A_1 относительно оси a. Докажите, что точки A и A_2 симметричны относительно прямой, перпендикулярной прямой a и проходящей через точку O.

27.5. 1) В трапеции $ABCD$ основания AD и BC соответственно равны 15 и 5 см, $\angle CDA = 60°$. Через вершину B и середину CD — точку O проведена прямая до пересечения с продолжением AD в точке E. $\angle ABE = 90°$, $\angle CBE = 30°$. Найдите периметр трапеции.

2) Постройте точки A_1 и B_1, симметричные точкам A и B относительно данной точки O. Докажите, что для любой точки прямой AB симметричная ей точка лежит на прямой A_1B_1.

27.6. 1) В равнобедренной трапеции $ABCD$ $\angle A = 75°$. Диагонали AC и BD пересекаются в точке O, $CE \perp AD$, $CE = AE$, $BO = 5$ см. Найдите боковые стороны трапеции.

2) Постройте точки M_1 и K_1, симметричные данным точкам M и K относительно данной прямой a. Докажите, что для любой точки отрезка MK симметричная ей точка лежит на отрезке M_1K_1.

27.7*. Даны выпуклый четырехугольник $MKPT$ и точка O внутри его. Постройте параллелограмм $ABCD$ так, чтобы точки M, K, P и T лежали на прямых AB, BC, CD и DA соответственно, а точка O являлась точкой пересечения его диагоналей.

27.8*. Даны прямая a и точка O на ней. Точки P и K не принадлежат прямой a ($PK \nparallel a$). Постройте ромб так, чтобы прямая a содержала одну из диагоналей ромба, а прямая PK — одну из сторон ромба и точка O являлась точкой пересечения его диагоналей.

ПЛОЩАДИ

§ 28. СВОЙСТВА ПЛОЩАДЕЙ МНОГОУГОЛЬНИКОВ. ПЛОЩАДЬ ПРЯМОУГОЛЬНИКА И КВАДРАТА

28.1. 1) Найдите площадь прямоугольника, если его периметр равен 80 см, а отношение сторон равно 2:3.
2) Площадь пятиугольника $ABOCD$ (рис. 139) равна 48 см^2. Найдите периметр квадрата $ABCD$.

28.2. 1) Найдите периметр прямоугольника, если его площадь равна 98 см^2, а одна из сторон вдвое больше другой.
2) Периметр квадрата $MKPT$ (рис. 140) равен 48 см. Найдите площадь пятиугольника $MOKPT$.

28.3. 1) В прямоугольнике $ABCD$ сторона AD равна 10 см. Расстояние от точки пересечения диагоналей до этой стороны равно 3 см. Найдите площадь прямоугольника.
2) $ABCD$ и $MDKP$ — равные квадраты (рис. 141), $AB = 8$ см. Найдите площадь и периметр четырехугольника $ACKM$.

28.4. 1) Площадь квадрата равна 36 см^2. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей квадрата до его сторон.
2) $ABCD$ и $DCMK$ — квадраты (рис. 142), $AB = 6$ см. Найдите площадь и периметр четырехугольника $OCPD$.

28.5. 1) В трапеции $ABCD$ $\angle A = 45°$, $\angle C = 100°$. Диагональ BD составляет с боковой стороной CD угол 35°. На стороне AB построен параллелограмм $ABPK$ так, что точка D принадлежит отрезку BP и $BD:DP = 2:1$. Найдите площадь параллелограмма, если его периметр равен 30 см.
2) $ABCD$ — прямоугольник, M, K, P и T — середины его

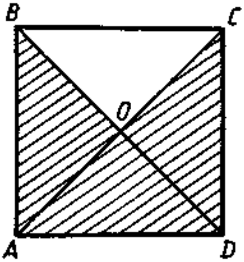

Рис. 139

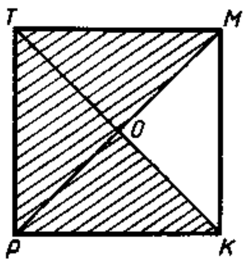

Рис. 140

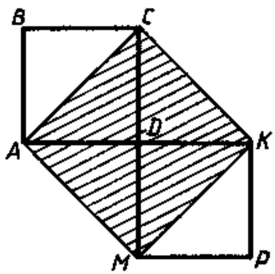

Рис. 141

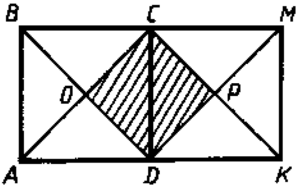

Рис. 142

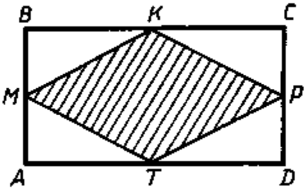

Рис. 143

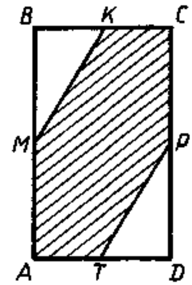

Рис. 144

сторон (рис. 143), $AB=6$ см, $AD=12$ см. Найдите площадь четырехугольника $MKPT$.

28.6. 1) В трапеции $MPKO$ $\angle M=45°$ и $\angle K=135°$. На стороне MP трапеции построен параллелограмм $MPDT$ так, что его сторона PD параллельна прямой KO и пересекает сторону MO в точке A, причем $PA:AD=1:3$. Площадь параллелограмма равна 36 см^2. Найдите его периметр.

2) $ABCD$ — прямоугольник, M, K, P и T — середины сторон (рис. 144), $AB=16$ см, $AD=10$ см. Найдите площадь шестиугольника $AMKCPT$.

28.7*. Точка A делит отрезок CD пополам, а точка B — на неравные части. Докажите, что площадь прямоугольника с измерениями CB и BD равна разности площадей квадратов с измерениями AD и AB.

28.8*. Периметр прямоугольника равен 20 см. Что больше: площадь этого прямоугольника или квадрата, имеющего тот же периметр?

§ 29. ПЛОЩАДЬ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

29.1. 1) Стороны параллелограмма равны 6 и 10 см, а высота, проведенная к меньшей из них, равна 8 см. Найдите высоту, проведенную к другой стороне.

2) Начертите произвольный параллелограмм. Проведите какую-либо прямую, которая разделила бы изображенный параллелограмм на два параллелограмма, имеющие равные площади.

29.2. 1) Стороны параллелограмма равны 6 и 10 см, а высота, проведенная к большей из них, равна 5 см. Найдите высоту, проведенную к другой стороне.

2) Начертите произвольный параллелограмм. Постройте какой-либо прямоугольник, имеющий такую же площадь, что и изображенный параллелограмм.

29.3. 1) В параллелограмме две стороны равны 6 и 8 см, а один из углов 150°. Найдите площадь параллелограмма.

2) Даны прямоугольник $ABCD$ и некоторый острый угол. Постройте параллелограмм по стороне, равной отрезку AD, и данному острому углу, имеющий такую же площадь, как и прямоугольник $ABCD$.

29.4. 1) В параллелограмме одна из сторон равна 10 см, а один из углов 30°. Найдите площадь параллелограмма, если его периметр равен 56 см.

2) Даны прямоугольник $ABCD$ и отрезок PH ($PH > AB$). Постройте параллелограмм, имеющий такую же площадь, что и данный прямоугольник, и стороны, равные отрезкам AD и PH.

29.5. 1) Площадь параллелограмма равна 48 см^2, а периметр 40 см. Найдите стороны параллелограмма, если высота, проведенная к одной из них, в 3 раза меньше этой стороны.

2) Дан параллелограмм $ABCD$, BK — его высота $\left(BK < \frac{1}{4}AD\right)$. Постройте квадрат, площадь которого в x раз больше площади параллелограмма, если $x = 0{,}25\frac{AD}{BK}$.

29.6. 1) В параллелограмме $ABCD$ диагональ BD перпендикулярна к основанию AD, угол B равен 135°, площадь параллелограмма равна 49 см^2. Найдите сторону AD параллелограмма.

2) Дан параллелограмм $ABCD$, AB меньше AD. Постройте ромб с теми же углами, что и параллелограмм $ABCD$, площадь которого в x раз меньше площади параллелограмма, если $x = 4\frac{AD}{AB}$.

29.7*. 1) Через вершины A и D параллелограмма проведены две параллельные прямые; первая прямая пересекает сторону BC в точке E. Из точек A и E опущены перпендикуляры AT и EP на вторую из параллельных прямых. Докажите, что площади четырехугольников $AEPT$ и $ABCD$ равны.

2) Даны равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC и некоторый острый угол. Постройте параллелограмм с острым углом, равным данному, и имеющий ту же площадь, что и трапеция $ABCD$.

29.8*. 1) Через вершины B и C параллелограмма $ABCD$ проведены параллельные прямые, из которых первая пересекает сторону AD в точке E, а вторая — ее продолжение в точке T. CC_1 и TT_1 — перпендикуляры к прямой BE. Площадь треугольника C_1T_1T равна 10 см^2. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$.

2) Даны треугольник ABC с тупым углом A и произвольный острый угол. Постройте параллелограмм, имеющий площадь, в 2 раза большую площади данного треугольника, по стороне, равной отрезку AC, и данному острому углу.

30.1. 1) Две стороны треугольника равны 12 и 9 см, а угол между ними 30°. Найдите площадь треугольника.
2) Найдите площадь ромба, если его диагонали равны 8 и 7 см.

30.2. 1) Найдите площадь треугольника, две стороны которого равны 6 и 8 см, а угол между ними 30°.
2) Диагонали ромба равны 5 и 12 см. Найдите площадь ромба.

30.3. 1) В треугольнике ABC $\angle A = 45°$, $BC = 10$ см, а высота BD делит сторону AC на отрезки $AD = 6$ см, $DC = 8$ см. Найдите площадь треугольника и высоту, проведенную к стороне BC.
2) Площадь ромба равна 48 см^2, а одна из диагоналей 12 см. Найдите вторую диагональ.

30.4. 1) В треугольнике ABC $\angle C = 45°$, $AB = 10$ см, а высота AD делит сторону CB на отрезки $CD = 8$ см, $DB = 6$ см. Найдите площадь треугольника и высоту, проведенную к стороне AB.
2) Найдите диагонали ромба, если одна из них в 3 раза больше другой, а площадь ромба 24 см^2.

30.5. 1) В треугольнике ABC $\angle A = 75°$, $\angle B = 30°$, $AB = 10$ см. Найдите площадь треугольника.
2) Найдите сторону квадрата, если его диагональ равна 10 см.

30.6. 1) В треугольнике ABC $\angle A = \angle B = 75°$. Найдите BC, если площадь треугольника равна 36 см^2.
2) Найдите диагональ квадрата, если его сторона равна 8 см.

30.7*. 1) $AO = 3$ см, $OB = 6$ см, $OC = 5$ см, $OD = 4$ см (рис. 145). Сумма площадей треугольников AOC и BOD равна 39 см^2. Найдите площадь треугольника AOC.
2) Площадь параллелограмма $ABCD$ равна Q. Точка M — середина стороны AB, P принадлежит стороне CD. Найдите площадь треугольника AMP.

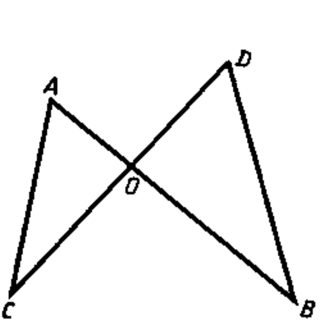

Рис. 145

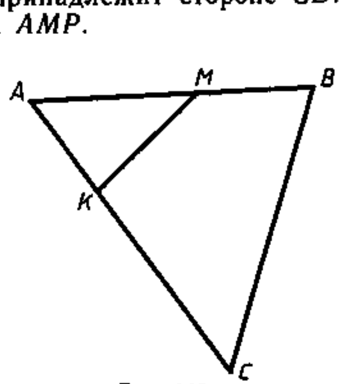

Рис. 146

30.8*. 1) $AM=6$ см, $MB=4$ см. $AK=4$ см, $AC=12$ см (рис. 146). Найдите площадь четырехугольника $MBCK$, если площадь треугольника AMK равна 16 см^2.

2) Площадь параллелограмма $ABCD$ равна Q. На прямой BC взята точка M. Найдите площадь треугольника AMD.

§ 31. ПЛОЩАДЬ ТРАПЕЦИИ

31.1. 1) Основания трапеции относятся как 2:3, а высота равна 6 см, площадь трапеции 60 см^2. Найдите основания трапеции.

2) В прямоугольной трапеции острый угол A равен 45°, а высота, проведенная из вершины тупого угла, делит большее основание на отрезки 2 и 6 см, считая от точки A. Найдите площадь трапеции.

31.2. 1) Одно из оснований трапеции больше другого на 7 дм, высота равна 8 дм, площадь 96 дм^2. Найдите основания трапеции.

2) Высота, проведенная из вершины тупого угла прямоугольной трапеции, составляет с боковой стороной угол 45°. Основания трапеции равны 8 и 4 см. Найдите площадь трапеции.

31.3. 1) Высота трапеции в 3 раза больше одного из оснований, но вдвое меньше другого. Найдите основания трапеции и высоту, если площадь трапеции равна 168 см^2.

2) Острый угол равнобедренной трапеции равен 45°, а основания равны 8 и 6 см. Найдите площадь трапеции.

31.4. 1) Высота больше меньшего основания трапеции на 6 см, разность оснований равна 12 см. Найдите основания трапеции, если ее площадь равна 64 см^2.

2) В равнобедренной трапеции тупой угол равен 135°, меньшее основание равно 4 см, а высота 2 см. Найдите площадь трапеции.

31.5. 1) В равнобедренной трапеции высота, проведенная из вершины тупого угла, делит большее основание на два отрезка, больший из которых равен 20 см. Найдите площадь трапеции, если ее высота равна 12 см.

2) В трапеции $ABCD$ AD и BC — основания, $AD:BC=2:1$. Точка E — середина стороны BC трапеции. Найдите площадь трапеции, если площадь треугольника AED равна 60 см^2.

31.6. 1) В равнобедренной трапеции угол между диагоналями равен 90°, высота трапеции равна 8 см. Найдите площадь трапеции.

2) В трапеции $ABCD$ BC и AD — основания, $BC:AD=3:4$. Площадь трапеции равна 70 см^2. Найдите площадь треугольника ABC.

32.1. 1) Диагонали ромба равны 14 и 48 см. Найдите сторону ромба.
2) В треугольнике два угла равны 45° и 90°, а большая сторона 20 см. Найдите две другие стороны треугольника.

32.2. 1) Стороны прямоугольника равны 8 и 12 см. Найдите его диагональ.
2) В треугольнике ABC $\angle A=90°$, $\angle B=30°$, $AB=6$ см. Найдите две другие стороны треугольника.

32.3. 1) В прямоугольной трапеции основания равны 5 и 17 см, а большая боковая сторона 13 см. Найдите площадь трапеции.
2) В треугольнике две стороны равны 10 и 12 см, а угол между ними 45°. Найдите площадь треугольника.

32.4. 1) В прямоугольной трапеции боковые стороны равны 15 и 9 см, а большее основание 20 см. Найдите площадь трапеции.
2) В треугольнике две стороны равны 12 и 8 см, а угол между ними 60°. Найдите площадь треугольника.

32.5. 1) В параллелограмме $ABCD$ $BD=2\sqrt{41}$ см, $AC=26$ см, $AD=16$ см. Через точку O — точку пересечения диагоналей параллелограмма проведена прямая, перпендикулярная стороне BC. Найдите отрезки, на которые эта прямая разделила сторону AD.
2) В треугольнике ABC $AB=BC$. Высота AK делит сторону BC на отрезки $BK=24$ см и $KC=1$ см. Найдите площадь треугольника и сторону AC.

32.6. 1) Две окружности радиусами 13 и 15 см пересекаются. Расстояние между их центрами O_1 и O_2 равно 14 см. Общая хорда этих окружностей AB пересекает отрезок O_1O_2 в точке K. Найдите O_1K и KO_2 (O_1 — центр окружности радиусом 13 см).
2) В треугольнике ABC $AB=AC$. Высота BM равна 9 см и делит боковую сторону AC на два отрезка так, что $AM=12$ см. Найдите площадь и периметр треугольника.

32.7*. 1) На продолжении диагонали AC ромба $ABCD$ взята произвольная точка M, которая соединена с вершиной B. Докажите, что $AM\cdot CM=MB^2-AB^2$.
2) В треугольнике ABC BD — высота, проведенная из вершины прямого угла. Используя теорему Пифагора, докажите, что $BD^2=AD\cdot DC$.

32.8*. 1) Гипотенуза AB прямоугольного треугольника ABC равна x. Произвольная точка M на катете BC соединена с вершиной A, а точка H на катете AC соединена с вершиной B. Найдите длину отрезка MH, если $AM^2+BH^2=y^2$.
2) В треугольнике ABC BD — высота, проведенная из вершины прямого угла. Используя формулу площади треугольника и теорему Пифагора, докажите, что $AB^2=AD\cdot AC$.

33.1. 1) Дан квадрат $ABCD$ со стороной 4 см. На стороне CD взята точка E, такая, что $EA=5$ см. Найдите:
а) CE; б) площадь четырехугольника $ABCE$.
2) Найдите площадь ромба, один из углов которого равен 120°, а сторона равна 10 см.

33.2. 1) В прямоугольнике $ABCD$ $AB=5$ см, $BC=18$ см, $AM=13$ см, где M — точка стороны BC. Найдите:
а) MC; б) площадь четырехугольника $AMCD$.
2) Найдите площадь ромба, один из углов которого равен 60°, а сторона равна 8 см.

33.3. 1) На стороне AB квадрата $ABCD$ взята точка M так, что $CM=25$ см. Диагональ квадрата равна $20\sqrt{2}$ см. Найдите:
а) AM; б) площадь четырехугольника $AMCD$.
2) Один из углов ромба равен 135°, а сторона ромба равна a. Найдите площадь ромба.

33.4. 1) На стороне BC прямоугольника взята точка M так, что $AM=13$ см, $AB=12$ см, $BD=20$ см. Найдите:
а) MC; б) площадь четырехугольника $AMCD$.
2) Один из углов ромба равен 45°, а сторона ромба равна a. Найдите площадь ромба.

33.5. 1) В треугольнике ABC $AB=17$ см, $BC=25$ см. Высота BD равна 15 см. Найдите площадь треугольника.
2) В ромбе $ABCD$ высота равна x, а $\angle ABC=120°$. На прямой BC взята точка M. Найдите площадь треугольника AMD.

33.6. 1) В треугольнике ABC $\angle A=45°$, а высота $BD=2$ см. Найдите площадь треугольника, если прямая BC составляет с прямой AD угол 60°.
2) В параллелограмме $ABCD$ $BD \perp AD$, $BD=10$ см, $AC=26$ см. На прямой AD взята точка P. Найдите площадь треугольника PBC.

33.7*. В трапеции $ABCD$ $BC \parallel AD$, $AB=8$ см, $BC=7{,}5$ см, $CD=6$ см, $AD=17{,}5$ см. Найдите площадь трапеции.

33.8*. В трапеции $ABCD$ BC и AD — основания. $AD=10$ см, $BC=5$ см, $AC=9$ см, $BD=12$ см. Найдите площадь трапеции.

ПОДОБНЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

§ 34. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОДОБНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ. ОТНОШЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ ПОДОБНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ. ТЕОРЕМА О БИССЕКТРИСЕ УГЛА

34.1. 1) AB и A_1B_1, BC и B_1C_1 — сходственные стороны подобных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, $\frac{BC}{B_1C_1}=2{,}5$, $A_1C_1=4$ см, $\angle B=$

$=47°21'$. Найдите $\angle B_1$, AC и отношение площадей этих треугольников.

2) Периметр треугольника равен 25 см, а его биссектриса делит противоположную сторону на отрезки, равные 7,5 и 2,5 см. Найдите стороны треугольника.

34.2. 1) Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны. BC и B_1C_1, AC и A_1C_1 — сходственные стороны. Найдите угол C_1, AB и отношение площадей этих треугольников, если $\frac{AC}{A_1C_1}=4{,}4$, $A_1B_1=5$ см, $\angle C=15°31'$.

2) Периметр треугольника равен 35 см. Найдите отрезки, на которые биссектриса треугольника делит противоположную сторону, если две другие стороны треугольника равны 12 и 16 см.

34.3. 1) MH и CP, MK и CT — сходственные стороны подобных треугольников MHK и CPT. Найдите TP, угол H и отношение площадей треугольников CPT и MHK, если $\frac{MN}{CP}=\frac{1}{3}$, $HK=11$ см, $\angle P=31°$.

2) Отрезок BD является биссектрисой треугольника ABC, углы ABD и A равны. $AB=28$ см, $BC=36$ см, $DC=27$ см. Вычислите BD.

34.4. 1) Треугольники KEP и COT подобны, KE и CO, KP и CT — их сходственные стороны, $\frac{KE}{CO}=\frac{1}{5}$, $EP=2{,}2$ см, $\angle T=42°5'$. Найдите угол P, OT и отношение площадей треугольников KEP и COT.

2) Отрезок CD является биссектрисой треугольника ABC. $AC=15$ см, $CD=10$ см, $BC=12$ см, углы ACD и A равны. Найдите BD.

34.5. 1) AB и A_1B_1, BC и A_1C_1 — сходственные стороны подобных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$. Найдите B_1C_1, угол A и отношение площадей треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, если $BC:A_1C_1=5:2$, $AC=7$ дм, $\angle B_1=17°$.

2) В равнобедренном треугольнике ABC точка E — середина основания AC, а точка K делит сторону BC в отношении 2:5, считая от вершины C. Найдите отношение, в котором прямая BE делит отрезок AK.

34.6. 1) В подобных треугольниках ABC и $C_1A_1B_1$ AB и C_1A_1, BC и A_1B_1 — сходственные стороны, $BC:A_1B_1=3:4$, $AC=6$ см, $\angle A_1=15°$. Найдите B_1C_1, угол B и отношение площадей треугольников $A_1B_1C_1$ и ABC.

2) В треугольнике MHP $MH=HP$, точка K — середина отрезка MP, а $O\in HP$. Прямая HK делит отрезок MO в отношении 3:4, считая от точки O. Найдите отношение $HO:OP$.

34.7*. 1) ABC — равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой AC, BD — его высота. Запишите равенство отношений сходственных сторон треугольников ABC и BDC, если известно, что они подобны.

2) В треугольнике ABC $AB=BC$, AA_1 и BB_1 — биссектрисы. Докажите, что данный треугольник равносторонний, если $BA_1=AB_1$.

34.8*. 1) ABC — неравнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой AC, BD — его высота. Запишите равенство отношений сходственных сторон треугольников ABD и BCD, если известно, что они подобны.
2) Докажите, что если медиана и высота, проведенные из одной вершины треугольника, делят его угол на три равные части, то этот треугольник прямоугольный.

§ 35. ПЕРВЫЙ И ВТОРОЙ ПРИЗНАКИ ПОДОБИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

35.1. 1) Докажите, что изображенные на рисунке 147 треугольники подобны.
2) Продолжения боковых сторон трапеции $ABCD$ (рис. 148) пересекаются в точке O. Найдите BO и отношение площадей треугольников BOC и AOD, если $AD=5$ см, $BC=2$ см, $AO=25$ см.

35.2. 1) Докажите, что изображенные на рисунке 149 треугольники подобны.
2) Отрезки AB и CD пересекаются в точке O (рис. 150), $AO=12$ см, $BO=4$ см, $CO=30$ см, $DO=10$ см. Найдите угол CAO, если $\angle DBO=61°$. Найдите отношение площадей треугольников AOC и BOD.

35.3. 1) Докажите, что изображенные на рисунке 151 треугольники подобны.
2) Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC соответственно в точках M и H. Найдите AC и отношение площадей треугольников ABC и BMH, если $MB=14$ см, $AB=16$ см, $MH=28$ см.

35.4. 1) Докажите, что треугольники MBH и CBA подобны (рис. 152).
2) В треугольнике ABC $AB=15$ м, $AC=20$ м, $BC=32$ м. На стороне AB отложен отрезок $AD=9$ м, а на стороне AC — отрезок $AE=12$ м. Найдите DE и отношение площадей треугольников ABC и ADE.

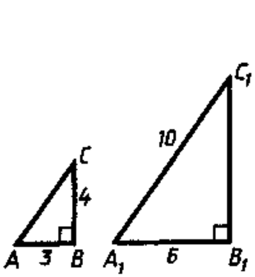

Рис. 147

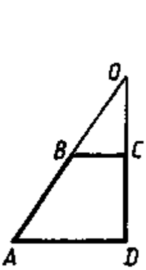

Рис. 148

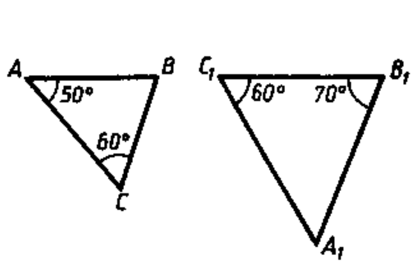

Рис. 149

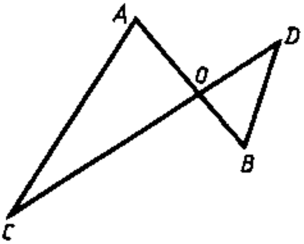

Рис. 150

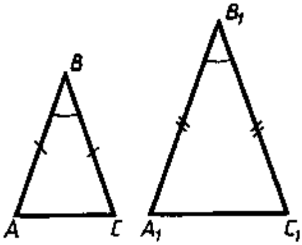

Рис. 151

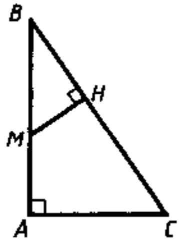

Рис. 152

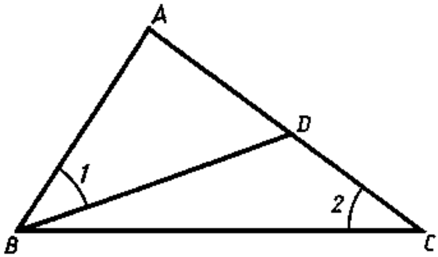

Рис. 153

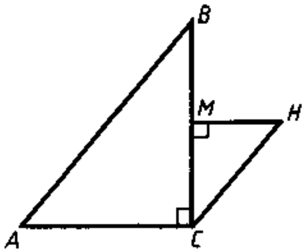

Рис. 154

35.5. 1) На рисунке 153 $\angle 1 = \angle 2$, $AD = 4$, $AC = 9$. Найдите AB и отношение площадей треугольников ABD и ABC.

2) Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O, $AO \cdot BO = CO \cdot DO$. Докажите, что площади треугольников ACD и ABD равны.

35.6. 1) На рисунке 154 $BC \perp AC$, $MH \perp BC$, $2MC = BC$, $MH = 0{,}5AC$. Докажите, что $AB \parallel CH$. Найдите отношение площадей треугольников ABC и MCH.

2) В трапеции $ABCD$ AD и BC — основания, O — точка пересечения диагоналей, $AO:OC = 3:2$. Найдите отношение площадей треугольников ABC и ACD.

§ 36. ТРИ ПРИЗНАКА ПОДОБИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

36.1. 1) Подобны ли два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$, если $AC = 14$ см, $A_1B_1 = 22$ см, $B_1C_1 = 26$ см, $A_1C_1 = 28$ см, $AB = 11$ см, $BC = 13$ см?

2) Отрезки AB и CD, пересекающиеся в точке O, таковы, что $AD \parallel BC$. Докажите, что $\frac{OB}{OA} = \frac{OC}{OD}$.

36.2. 1) Подобны ли два равнобедренных треугольника, если боковая сторона и основание одного из них пропорциональны боковой стороне и основанию другого?

2) Прямая пересекает стороны AB и BC треугольника ABC в точках M и H соответственно. $BA = 3MB$, $BH = \frac{1}{3} BC$. Докажите, что $MH \parallel AC$.

36.3. 1) Подобны ли два треугольника MHK и CPT, если $MH = 10$, $TP = 24$, $HK = 15$, $CP = 16$, $MK = 20$, $CT = 32$?

2) Точка E — середина стороны BC параллелограмма $ABCD$. Докажите, что прямая AE делит диагональ параллелограмма BD в отношении $1:2$.

36.4. 1) Из металлических стержней изготовили три разносторонних подобных треугольника. В каждом треугольнике большую сторону закрасили в красный цвет, а меньшую — в синий. Будет ли треугольник, составленный из синих стержней, подобен треугольнику, составленному из красных стержней?

2) Отрезки AB и CD пересекаются в точке O, $AB \perp CD$, $AO = \frac{1}{3} OB$, $OD = 3CO$. Найдите угол OCA, если $\angle DBO = 25°$.

36.5. 1) В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = 7$, $BC = 6$, $AC = 12$, $A_1B_1 = 4{,}5$, $B_1C_1 = 9$, $A_1C_1 = 5{,}25$. Выразите угол C_1 через углы C и B.

2) Основания трапеции равны 9 и 6 см, а высота равна 10 см. Найдите расстояния от точки пересечения диагоналей трапеции до ее оснований.

36.6. 1) Докажите, что если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника пропорциональны гипотенузе и катету другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники подобны.

2) На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC отмечены соответственно точки M, H, K так, что $4AM = AB$, $3HC = BH$. В каком отношении прямая MH делит отрезок BK?

36.7*. 1) На рисунке 155 $ABCD$ — параллелограмм, $\frac{AM}{CT} = \frac{AP}{CK} \neq 1$. Докажите, что четырехугольник $MKTP$ — трапеция.

2) Докажите, что два равнобедренных треугольника подобны, если боковая сторона и медиана, проведенная к

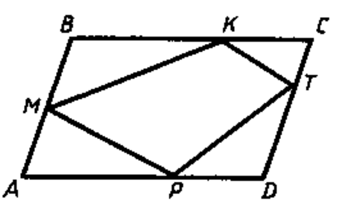

Рис. 155

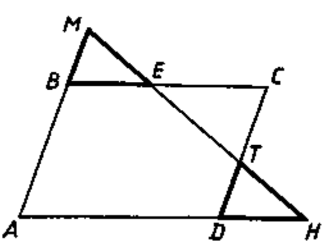

Рис. 156

ней, одного треугольника пропорциональны боковой стороне и медиане, проведенной к ней, другого треугольника.

36.8*. 1) В треугольниках BME и DTH на рисунке 156 $\frac{BM}{DT}=\frac{ME}{TH}=\frac{BE}{DH}$. Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.

2) Докажите, что отрезок, соединяющий основания высот остроугольного треугольника, отсекает от этого треугольника треугольник, подобный данному.

§ 37. СРЕДНЯЯ ЛИНИЯ ТРЕУГОЛЬНИКА. СВОЙСТВО МЕДИАН ТРЕУГОЛЬНИКА

37.1. 1) M и K соответственно середины сторон AB и BC треугольника ABC, $MB=6$ см, $MK=5$ см, $BC=14$ см. Найдите периметр треугольника ABC.

2) Найдите расстояние от точки пересечения медиан равнобедренного треугольника ABC до стороны BC, если $AB=AC=10$ см, $BC=16$ см.

37.2. 1) K и P соответственно середины сторон AB и BC треугольника ABC, $AC=8$ см, $CP=6$ см, $AB=14$ см. Найдите периметр треугольника BKP.

2) В равнобедренном треугольнике ABC $AB=AC=13$ см, $BC=10$ см. Найдите расстояние от точки пересечения медиан треугольника до вершины A.

37.3. 1) В прямоугольном треугольнике с углом 30° и меньшим катетом 6 см проведены средние линии. Найдите периметр треугольника, образованного средними линиями.

2) В треугольнике со сторонами 25, 25, 14 см найдите расстояния от точки пересечения медиан до вершин треугольника.

37.4. 1) В прямоугольном треугольнике с углом 45° и гипотенузой 8 см проведены средние линии. Найдите периметр треугольника, образованного средними линиями.

2) В равнобедренном треугольнике расстояния от точки пересечения медиан до вершин треугольника равны 25, 14 и 25 см. Найдите стороны треугольника.

37.5. 1) В треугольнике ABC медианы AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O. Точки A_2, B_2, C_2 являются серединами отрезков OA_1, OB_1, OC_1 соответственно. Докажите, что треугольники ABC и $A_2B_2C_2$ подобны.

2) В треугольнике со сторонами 15, 15 и 24 см найдите расстояния от точки пересечения медиан до сторон треугольника.

37.6. 1) В треугольнике ABC медианы AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке O. Точки A_2, B_2, C_2 являются соответственно серединами отрезков AO, BO, CO. Докажите, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равны.

2) Расстояния от точки пересечения медиан равнобедренного треугольника до сторон равны 8, 8 и 5 см. Найдите стороны треугольника.

§ 38. ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫЕ ОТРЕЗКИ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ. ДЕЛЕНИЕ ОТРЕЗКА НА РАВНЫЕ ЧАСТИ

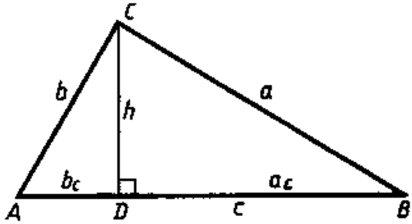

Рис. 157

38.1. 1) В треугольнике на рисунке 157 $a_c=1$, $c=4$. Найдите a, b, b_c, h.
2) Начертите отрезок и, используя циркуль, линейку и чертежный угольник, разделите его на 5 равных частей.

38.2. 1) В треугольнике, изображенном на рисунке 157, $a_c=6$, $b_c=2$. Найдите h, c, a, b.
2) Начертите отрезок и, используя циркуль, линейку и чертежный угольник, разделите его на 3 равные части.

38.3. 1) Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 13, один из катетов равен 5. Найдите второй катет, высоту, проведенную из вершины прямого угла, и отрезки, на которые эта высота делит гипотенузу.
2) Начертите отрезок и, используя циркуль, линейку и чертежный угольник, разделите его в отношении 3:2.

38.4. 1) Высота, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна 5, а один из катетов 13. Найдите гипотенузу, второй катет и отрезки, на которые высота делит гипотенузу.
2) Начертите отрезок и, используя циркуль, линейку и чертежный угольник, разделите его в отношении 3:4.

38.5. 1) Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 5, а высота, проведенная к ней, равна 2. Найдите катеты и отрезки, на которые эта гипотенуза делится высотой.
2) Начертите три произвольных отрезка AB, A_1B_1, A_2B_2 и, используя циркуль и линейку, постройте отрезок XY, удовлетворяющий условию $A_2B_2:AB=A_1B_1:XY$.

38.6. 1) В прямоугольном треугольнике ABC к гипотенузе AC проведена высота BD, $BC=2$ см, $AD=3$ см. Найдите DC, BD, AB.
2) Даны три отрезка, имеющие длины a, b, c. Постройте отрезок длиной x, используя циркуль и линейку, если $a\cdot x=b\cdot c$.

38.7*. 1) В трапеции $ABCD$ $\angle A=90°$, луч DM, являющийся биссектрисой острого угла ADC, пересекает отрезок AB в его середине — точке M. Из точки M проведен перпендикуляр MK к стороне CD. $KC=4$ см, $KD=9$ см. Найдите MK.
2) Даны два отрезка, имеющие длины a и b. Постройте отрезок длиной $\frac{2\sqrt{ab}}{3}$, используя циркуль и линейку.

38.8*. 1) Диагонали прямоугольной трапеции взаимно перпендикулярны. Найдите меньшее основание трапеции, если ее высота равна 2, а большее основание 3.
2) Пусть a и b — длины двух данных отрезков. Используя циркуль и линейку, постройте отрезок длиной $0{,}4\sqrt{ab}$.

39.1. По данному углу H и данным отрезкам P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3, используя циркуль, линейку и чертежный угольник, постройте треугольник ABC так, чтобы $\angle A = \angle H$, $\frac{AB}{P_1Q_1} = \frac{AC}{P_2Q_2}$ и $AC = P_3Q_3$.

39.2. По данным отрезкам P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3, P_4Q_4, используя циркуль, линейку и чертежный угольник, постройте треугольник ABC так, чтобы $\frac{AB}{P_1Q_1} = \frac{AC}{P_2Q_2} = \frac{BC}{P_3Q_3}$ и $AC = P_4Q_4$.

39.3. Используя циркуль, линейку и чертежный угольник, методом подобия постройте треугольник по двум углам и высоте, проведенной из вершины третьего угла.

39.4. Используя циркуль, линейку и чертежный угольник, методом подобия постройте прямоугольный треугольник по острому углу и биссектрисе прямого угла.

39.5. Используя циркуль, линейку и чертежный угольник, постройте параллелограмм, стороны которого относятся как 1:2, по острому углу и диагонали, проведенной из вершины этого угла.

39.6. Используя циркуль, линейку и чертежный угольник, постройте параллелограмм, стороны которого относятся как 1:3, по тупому углу и большей диагонали.

39.7*. В треугольник ABC впишите равнобедренный прямоугольный треугольник MHP так, чтобы точки M, H, P были точками сторон AB, BC и AC соответственно, а угол MHP был равен 90°.

39.8*. В данный треугольник впишите прямоугольник с данным соотношением сторон так, чтобы две его вершины принадлежали разным сторонам треугольника, а две другие лежали на третьей.

§ 40. ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ РАБОТЫ НА МЕСТНОСТИ

40.1. Найдите высоту дерева (рис. 158), если длина шеста AC с вращающейся планкой равна 1,5 м, $BC = 3{,}3$ м, $BC_1 = 13{,}2$ м.

40.2. Для определения расстояния от точки A до недоступной точки B (рис. 159) выбирают точку C и измеряют AC, $\angle A$,

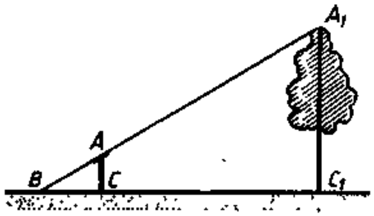

Рис. 158

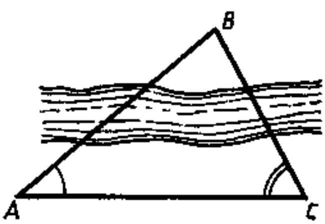

Рис. 159

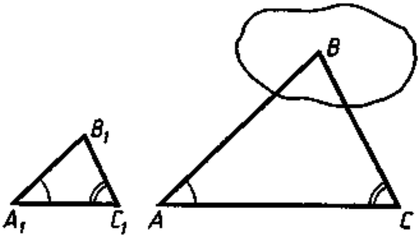

Рис. 160

$\angle C$. Затем строят на бумаге треугольник $A_1B_1C_1$, подобный треугольнику ABC. Вычислите AB, если $AC=112$ м, $A_1C_1=5{,}6$ см, $A_1B_1=8{,}4$ см. Вычисления обоснуйте.

40.3. Длина солнечной тени от дерева равна 24 м. Вертикальный шест высотой 1 м 50 см в тот же момент отбрасывает тень длиной 1 м 60 см. Вычислите высоту дерева.

40.4. Для определения расстояния от точки A до недоступной точки B (рис. 160) измерили углы A и C, получили $\angle A=45°$, $\angle C=60°$, $AC=80$ м. Постройте в тетради треугольник $A_1B_1C_1$, подобный треугольнику ABC, сделайте необходимые измерения и найдите искомое расстояние.

§ 41. ПОДОБНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ

41.1. 1) Объясните, почему десятиугольник не может быть подобен девятиугольнику.

2) Найдите периметры двух подобных многоугольников с коэффициентом подобия $k=5$, если их разность равна 16 см.

41.2. 1) Являются ли равные многоугольники подобными? Равны ли подобные многоугольники?

2) Сумма периметров двух подобных многоугольников равна 490 м. Найдите каждый из периметров, если коэффициент подобия равен 6.

41.3. 1) Сформулируйте один из признаков подобия ромбов.

2) Длина стороны многоугольника равна 3 м, а длина сходственной стороны подобного ему многоугольника равна 48 дм. Найдите периметры этих многоугольников, если их разность составляет 12 м.

41.4. 1) Сформулируйте один из признаков подобия прямоугольников.

2) Сумма периметров двух подобных многоугольников равна 56 м. Найдите эти периметры, если меньшая сторона первого многоугольника равна 4 м, а меньшая сторона второго 72 дм.

41.5. 1) Внешний и внутренний контуры рамки имеют форму прямоугольника, ширина рамки равна 2 см. Будут ли подобны внешний и внутренний прямоугольники, если внешний имеет размер 30×40 см?

2) В трапеции $ABCD$ $AB=BC=CD$. Диагонали трапеции пересекаются в точке O. Найдите отношение периметров треугольников ABC и BOC, если $AC:BC=5:4$.

41.6. 1) Прямоугольные цементные плиты, выпускаемые заводом, имеют такие размеры, что половина плиты подобна целой плите. Найдите отношение сторон таких плит.

2) Основания трапеции равны 4 и 9 см, а одна из диагоналей 6 см. Найдите отношение периметров треугольников, на которые диагональ разбивает трапецию.

§ 42. СИНУС, КОСИНУС, ТАНГЕНС ОСТРОГО УГЛА ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА. ОСНОВНОЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЕ ТОЖДЕСТВО

42.1. 1) Найдите синус, косинус и тангенс острых углов A и B прямоугольного треугольника ABC, если $AB=13$ см, $BC=12$ см.

2) Найдите $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha=\frac{3}{4}$, $0°<\alpha<90°$.

42.2. 1) Найдите синус, косинус и тангенс острых углов A и C прямоугольного треугольника ABC, если $AC=25$ см, $AB=7$ см.

2) Найдите $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha=\frac{2}{3}$, $0°<\alpha<90°$.

42.3. 1) Докажите, что если два прямоугольных треугольника имеют по равному катету, то отношение синусов углов, противолежащих этим катетам, обратно отношению гипотенуз, а отношение тангенсов этих углов обратно отношению неравных катетов.

2) Найдите $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$.

42.4. 1) Докажите, что если два прямоугольных треугольника имеют равные гипотенузы, то синусы их острых углов пропорциональны противоположным катетам, а косинусы этих углов пропорциональны прилежащим катетам.

2) Вычислите $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}$.

42.5. Стороны остроугольного треугольника равны 13, 14 и 15 см. Вычислите синус, косинус и тангенс каждого из углов треугольника.

42.6. Вычислите синус, косинус и тангенс углов остроугольного треугольника со сторонами 17, 25 и 28 см.

§ 43. РЕШЕНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРОВ

43.1. 1) В треугольнике MHP $\angle P=90°$, $MH=4{,}67$, $\angle H=65°12'$. Найдите неизвестные элементы треугольника.

2) Найдите углы треугольника, стороны которого равны 9,5; 9,5 и 6,5 см.

43.2. 1) В треугольнике KLF $\angle F=90°$, $KL=12{,}4$ см, $\angle K=41°21'$. Найдите неизвестные элементы треугольника.

2) Найдите углы треугольника, стороны которого равны 95; 95 и 178,5 мм.

43.3. 1) В треугольнике ABC $\angle C=90°$, $\angle A=20°30'$, $AC=32{,}6$ см. Найдите неизвестные элементы треугольника.

2) В равнобедренной трапеции основания равны 9 и 5 см, а один из углов $147°15'$. Найдите площадь и периметр трапеции.

43.4. 1) В треугольнике PEC $\angle C=90°$, $\angle P=63°24'$, $CE=15{,}9$ см. Найдите неизвестные элементы треугольника.

2) В прямоугольной трапеции основания равны 13 и 8 см, а один из углов $112°57'$. Найдите периметр и площадь трапеции.

43.5. 1) В треугольнике ABC $\angle C=90°$, $AC=2{,}7$ см, $BC=3{,}22$ см. Найдите неизвестные элементы треугольника.

2) В треугольнике две стороны равны 6 и 8 см, а угол между ними $40°31'$. Найдите неизвестные углы и сторону треугольника.

43.6. 1) В треугольнике CDM $\angle M=90°$, $CD=4{,}2$ см, $CM=2{,}7$ см. Найдите неизвестные элементы треугольника.

2) В треугольнике две стороны треугольника равны 10 и 12 см, а угол между ними $141°13'$. Найдите неизвестные углы и сторону треугольника.

§ 44. РЕШЕНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

44.1. 1) В треугольнике ABC, изображенном на рисунке 161, угол ACB прямой, CD — высота треугольника, угол A равен α. Найдите AC, BC и AD, если известно, что $AB=m$.

2) Стороны параллелограмма равны 8 и 10 см, угол между ними 60°. Найдите площадь параллелограмма.

44.2. 1) На рисунке 162 изображен прямоугольный треугольник MHP и его высота PK, $\angle MPH=90°$, $PH=b$, $\angle H=\beta$. Найдите MH, MP и KH.

2) Найдите площадь параллелограмма, у которого стороны равны 8 и 6 см, а угол равен 45°.

44.3. 1) На рисунке 163 изображены прямоугольные треугольники ABC и ADB ($\angle ABC=\angle D=90°$), $\angle CAB=\alpha$, $\angle ABD=\beta$, $BC=a$. Найдите AD.

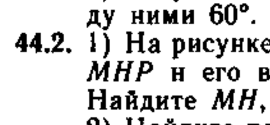

Рис. 161

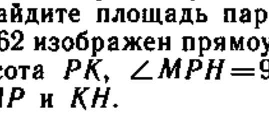

Рис. 162

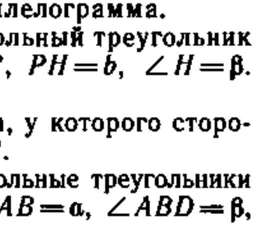

Рис. 163

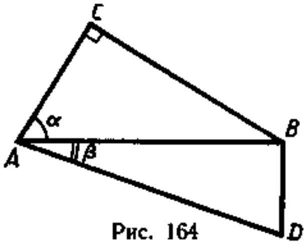

Рис. 164

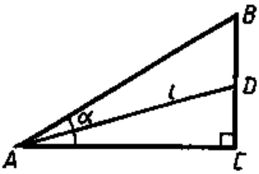

Рис. 165

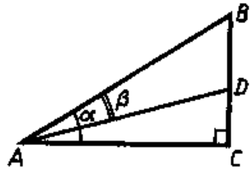

Рис. 166

2) В прямоугольной трапеции меньшее основание равно 6, а меньшая боковая сторона $2\sqrt{3}$. Найдите площадь трапеции, если один из ее углов равен 120°.

44.4. 1) На рисунке 164 изображены прямоугольные треугольники ABC и ABD ($\angle C = \angle ABD = 90°$), $\angle CAB = \alpha$, $\angle BAD = \beta$, $AC = m$. Найдите AD.

2) В равнобедренной трапеции меньшее основание равно 5, а высота $\sqrt{3}$. Найдите площадь трапеции, если один из ее углов равен 150°.

44.5. 1) В треугольнике ABC, изображенном на рисунке 165, угол C прямой. Биссектриса AD равна l, угол BAC равен α. Найдите BD.

2) В равнобедренном треугольнике ABC AC — основание, $\angle A = 30°$, CD — высота. Найдите высоту, опущенную из вершины B, если $AD = 20$ см.

44.6. 1) На рисунке 166 изображен треугольник ABC с прямым углом C, $\angle BAD = \beta$, $\angle BAC = \alpha$, $AB = m$. Найдите BD.

2) В равнобедренном треугольнике ABC $AB = BC$, $\angle ABC = 120°$, CD — высота. Найдите AD, если высота, проведенная к основанию, равна 10 см.

44.7*. В треугольнике ABC $AB = BC$, BF и AE — высоты, $AE : BF = \frac{1}{2}$. Найдите косинус угла при основании треугольника.

44.8*. В треугольнике ABC $AB = BC$, BF и AE — высоты. Найдите отношение $AE : BF$, если косинус угла при основании треугольника равен $\frac{2}{5}$.

ОКРУЖНОСТЬ

§ 45. КАСАТЕЛЬНАЯ К ОКРУЖНОСТИ

45.1. 1) Прямая AB касается окружности с центром O и радиусом 5 см в точке A. Найдите OB, если $AB = 12$ см.

2) В треугольнике ABC угол A прямой. Докажите, что прямая AC касается окружности с центром в точке B и радиусом AB.

45.2. 1) Прямая AB касается окружности с центром O и радиусом 15 см в точке B. Найдите AB, если $OA = 17$ см.

2) Четырехугольник $ABCD$ — прямоугольник. Докажите,

что прямая BC касается окружности с центром в точке D и радиусом DC.

45.3. 1) Из точки A к окружности с центром O и радиусом 8 см проведены касательные AB и AC (B и C — точки касания). Найдите AB и AC, если $\angle BAC=60°$.

2) Точка D — середина основания AB равнобедренного треугольника ABC. Докажите, что прямая AB касается окружности с центром в точке C и радиусом CD.

45.4. 1) Из точки M к окружности с центром O проведены касательные MA и MB (A и B — точки касания). Найдите AM и BM, если $\angle AMB=90°$, $OM=10$ см.

2) AK — биссектриса равностороннего треугольника ABC. Докажите, что прямая BC касается окружности с центром в точке A и радиусом AK.

45.5. 1) Из точки M к окружности с центром O и радиусом 8 см проведены касательные AM и BM (A и B — точки касания). Найдите периметр треугольника ABM, если $\angle AOB=120°$.

2) Даны прямая k и точка A, не лежащая на ней. С помощью циркуля и линейки постройте окружность с центром в точке A и касающуюся прямой k.

45.6. 1) Из точки A к окружности с центром O проведены касательные AB и AC (B и C — точки касания). Найдите периметр треугольника ABC, если $OA=12$ см, $\angle BOC=60°$.

2) Даны прямая a, точка M на ней и отрезок PQ. С помощью циркуля и линейки постройте окружность радиусом, равным PQ, касающуюся прямой a в точке M.

§ 46. ЦЕНТРАЛЬНЫЕ И ВПИСАННЫЕ УГЛЫ

46.1. 1) Точки A, B и C делят окружность с центром O на три дуги: $\smile AB$, $\smile BC$ и $\smile AC$, градусные меры которых относятся как 7:5:6. Найдите углы ABC, BAC, AOB.

2) Хорды AB и CD пересекаются в точке M. Найдите длину хорды AB, если $CM=4$ см, $DM=9$ см, $AM:MB=4$.

46.2. 1) Вершины треугольника ABC делят окружность с центром O на три дуги: $\smile AB$, $\smile BC$ и $\smile AC$, градусные меры которых относятся как 2:9:7. Найдите углы AOC, BOC и ACB.

2) Хорды MK и PT пересекаются в точке A. Найдите длину AM, если $AP=2$ дм, $AT=24$ дм, $AM:KA=3:4$.

46.3. 1) Точки A, B и C лежат на окружности с центром O, $\angle ABC=50°$, $\smile AB : \smile CB=5:8$. Найдите эти дуги и $\angle AOC$.

2) Диаметр AB пересекает хорду CD в точке M. Найдите отрезки, на которые точка M делит диаметр AB, если $r=10$ см, $CM=4$ см, $MD=9$ см.

46.4. 1) Точки K, M и T лежат на окружности с центром O, $\angle KMT=70°$, $\smile KM : \smile MT=5:6$. Найдите эти дуги и $\angle KOT$.

2) Хорда AB пересекает диаметр CD окружности с центром O в точке K. Найдите хорду AB, если $AK=11$ см, $CK=3$ см, $OD=12{,}5$ см.

46.5. 1) Окружность с центром O касается сторон AB, BC, CA треугольника ABC в точках P, K, T соответственно. Найдите $\smile PK$, $\smile KT$, $\smile TP$ и $\angle PKT$, если $\angle ABC=57°$, $\angle BAC=95°$.

2) Точка K делит хорду AP на отрезки 12 и 14 см. Найдите радиус окружности, если расстояние от центра окружности до точки K равно 11 см.

46.6. 1) Окружность с центром O касается сторон MK, KT и TM треугольника MKT в точках A, B и C соответственно. Найдите углы треугольника ABC, если $\angle MKT=42°$, $\angle KMT=82°$.

2) Хорда PK делится точкой M на два отрезка $PM=7$ дм, $MK=8$ дм. Найдите расстояние от точки M до центра окружности, если ее радиус равен 9 дм.

§ 47. ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ТОЧКИ В ТРЕУГОЛЬНИКЕ

47.1. 1) В остроугольном треугольнике ABC высоты AA_1 и BB_1 пересекаются в точке O. Найдите угол OCA, если $\angle BAC=58°$.

2) В треугольнике ABC биссектрисы AA_1 и BB_1 пересекаются в точке O, удаленной от стороны AB на 4 см. Найдите площадь треугольника BOC, если $BC=10$ см.

47.2. 1) В остроугольном треугольнике ABC серединные перпендикуляры сторон AB и BC пересекаются в точке O и $OB=10$ см. Найдите расстояние от точки O до стороны AC, если $\angle OAC=30°$.

2) В треугольнике ABC медианы AA_1 и BB_1 пересекаются в точке O и взаимно перпендикулярны. Найдите площадь треугольника AOB, если $AA_1=18$ см, $BB_1=24$ см.

47.3. 1) В остроугольном треугольнике ABC высоты AA_1 и CC_1 пересекаются в точке O. Найдите угол OBA, если $\angle OCA=38°$.

2) В треугольнике ABC биссектрисы BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O. Найдите отношение площадей треугольников BOA и AOC, если $AB=10$ см, $AC=15$ см.

47.4. 1) В остроугольном треугольнике ABC серединные перпендикуляры сторон AB и AC пересекаются в точке O и $OA=8$ см. Найдите площадь треугольника OBC, если $\angle OBC=60°$.

2) В треугольнике ABC медианы AA_1 и CC_1 пересекаются в точке O и взаимно перпендикулярны. Найдите стороны треугольника, если $AA_1=9$ см, $CC_1=12$ см.

47.5. 1) В остроугольном треугольнике ABC высоты BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O. Найдите угол OAB, если $BC=2BC_1$.

2) В треугольнике ABC медианы BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O и взаимно перпендикулярны. Найдите OA, если $BB_1=36$ см, $CC_1=15$ см.

47.6. 1) В остроугольном треугольнике ABC серединные перпендикуляры сторон BC и AC пересекаются в точке O. Найдите длину OC, если $AB=10$ см, а $\angle BOA=120°$.

2) Во внутренней области треугольника ABC взята точка O, равноудаленная от его сторон. Найдите угол AOC, если $\angle ABO=39°$.

47.7*. Даны окружность и прямая a, проходящая через центр этой окружности. Через точку M, лежащую вне круга, $M \notin a$, с помощью линейки проведите прямую, перпендикулярную прямой a.

47.8*. Даны окружность, прямая, проходящая через ее центр, и точка, не лежащая на прямой, но принадлежащая кругу. С помощью линейки постройте через эту точку прямую, перпендикулярную данной прямой.

§ 48. ВПИСАННАЯ ОКРУЖНОСТЬ

48.1. 1) Найдите радиус окружности, вписанной в равносторонний треугольник со стороной 12 см.

2) В четырехугольнике $ABCD$, описанном около окружности, $AB=8$ см, $CD=13$ см, $DA=16$ см. Найдите сторону BC.

48.2. 1) Радиус окружности, вписанной в равносторонний треугольник, равен 2 см. Найдите сторону этого треугольника.

2) Найдите сторону AB описанного четырехугольника $ABCD$, если $BC=11$ см, $CD=13$ см, $DA=15$ см.

48.3. 1) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник со сторонами 20, 20 и 24 см.

2) Найдите радиус окружности, если основания описанной около нее равнобедренной трапеции равны 16 и 36 см.

48.4. 1) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник со сторонами 15, 24 и 15 см.

2) Найдите периметр описанной около окружности прямоугольной трапеции, если одно из оснований больше другого на 6 см, а радиус окружности равен 4 см.

48.5. 1) В прямоугольном треугольнике один из углов равен 30°. Найдите меньшую сторону треугольника, если радиус вписанной в него окружности равен 4 см.

2) Расстояния от центра вписанной в прямоугольную трапецию окружности до концов большей боковой стороны равны 6 и 8 см. Найдите площадь трапеции.

48.6. 1) В прямоугольном треугольнике один из углов равен 60°, а расстояние от центра вписанной окружности до вершины этого угла равно 10 см. Найдите бóльшую сторону этого треугольника.

2) Расстояния от центра вписанной в равнобедренную трапецию окружности до концов боковой стороны равны 9 и 12 см. Найдите площадь трапеции.

§ 49. ОПИСАННАЯ ОКРУЖНОСТЬ

49.1. 1) Найдите радиус окружности, описанной около равностороннего треугольника со стороной 12 см.

2) Найдите периметр прямоугольного треугольника, вписанного в окружность радиуса 13 см, если один из его катетов равен 10 см.

49.2. 1) Найдите сторону равностороннего треугольника, вписанного в окружность радиуса 4 см.

2) Один из катетов прямоугольного треугольника равен 30 см, а радиус описанной около него окружности 17 см. Найдите площадь этого треугольника.

49.3. 1) Основание тупоугольного равнобедренного треугольника равно 24 см, а радиус описанной около него окружности 13 см. Найдите боковую сторону треугольника.

2) Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность так, что сторона AD является диаметром окружности, $\angle ABC = 121°$, $\angle BCD = 129°$. Найдите углы BAD, CDA, ACB.

49.4. 1) Найдите стороны остроугольного равнобедренного треугольника, если высота, проведенная к его основанию, равна 8 см, а радиус окружности, в которую он вписан, 5 см.

2) MP — диаметр окружности, описанной около четырехугольника $MKTP$. Найдите углы KTP, TPM, KMP, если $\angle KTM = 24°$, $\angle MKT = 127°$.

49.5. 1) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника со сторонами 10, 12 и 10 см.

2) Равнобедренная трапеция вписана в окружность так, что центр окружности принадлежит одному из оснований. Найдите углы трапеции, если один из углов между ее диагоналями равен 48°.

49.6. 1) Найдите радиус окружности, в которую вписан треугольник со сторонами 15, 24 и 15 см.

2) Каждая из боковых сторон и меньшее основание трапеции равны 5 см, а один из ее углов равен 60°. Найдите радиус окружности, описанной около нее.

ВЕКТОРЫ

§ 50. ПОНЯТИЕ ВЕКТОРА

50.1. 1) С помощью циркуля и чертежного угольника отложите от точки A вектор $\vec{b}$, равный $\vec{a}$ (рис. 167).

2) В треугольнике ABC AM — медиана. Равны ли векторы $\overrightarrow{MB}$ и $\overrightarrow{CM}$?

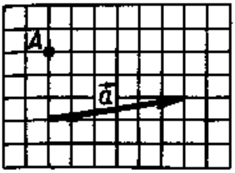

Рис. 167

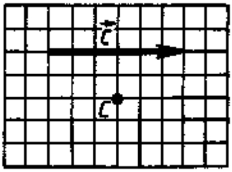

Рис. 168

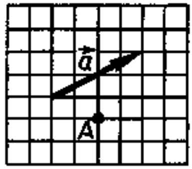

Рис. 169

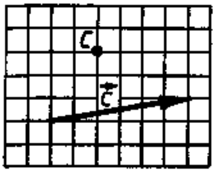

Рис. 170

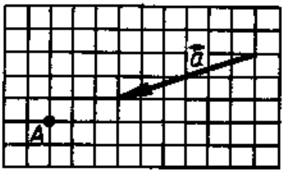

Рис. 171

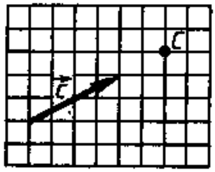

Рис. 172

50.2. 1) С помощью чертежного угольника и линейки отложите от точки C вектор $\vec{b}$, равный вектору $\vec{c}$ (рис. 168).

2) Даны точки A, B, C, M, такие, что $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$, а точка C не лежит на прямой AB. Назовите медиану треугольника ABC, проведенную из вершины C.

50.3. 1) С помощью линейки и циркуля отложите от точки A вектор, равный вектору $\vec{a}$ (рис. 169).

2) Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются и в точке пересечения делятся пополам. Равны ли векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$?

50.4. 1) С помощью циркуля и линейки отложите от точки C вектор, равный $\vec{c}$ (рис. 170).

2) В четырехугольнике $ABCD$ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$. Докажите, что этот четырехугольник — параллелограмм.

50.5. 1) С помощью циркуля и линейки отложите от точки A вектор, равный вектору $\vec{a}$ (рис. 171).

2) Точки E, K, M, H соответственно середины сторон AB, BC, CD, AD четырехугольника $ABCD$. Докажите, что $\overrightarrow{EK}=\overrightarrow{HM}$.

50.6. 1) С помощью циркуля и линейки отложите от точки C вектор, равный вектору $\vec{c}$ (рис. 172).

2) Никакие три из четырех точек A, B, C, D не лежат на одной прямой, и $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$. Докажите, что отрезки AD и BC пересекаются и в точке пересечения делятся пополам.

§ 51. СЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРОВ

51.1. 1) Постройте вектор $\vec{a}+\vec{c}$ (рис. 173).

2) M, H, P, O, S — произвольные точки. Найдите сумму $\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HP}+\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OS}+\overrightarrow{SM}$.

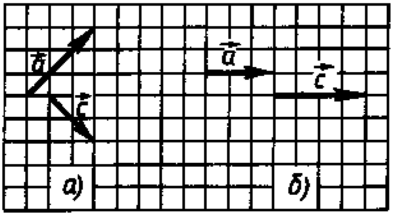

Рис. 173

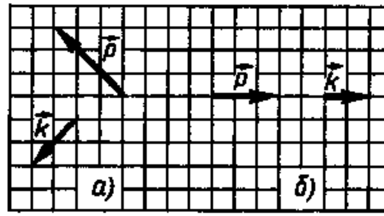

Рис. 174

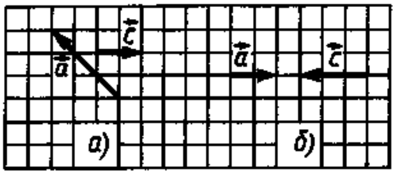

Рис. 175

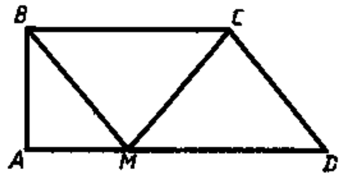

Рис. 176

51.2. 1) Постройте вектор $\vec{p}+\vec{k}$ (рис. 174).

2) Даны произвольные точки A, B, C, D, E. Докажите, что $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BD}$.

51.3. 1) Постройте вектор $\vec{a}+\vec{c}$ (рис. 175).

2) На рисунке 176 четырехугольник $MBCD$ — параллелограмм. Докажите, что $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$.

51.4. 1) Постройте вектор $\vec{p}+\vec{k}$ (рис. 177). В случае а) построение выполните двумя способами.

2) На рисунке 178 четырехугольник $MHPK$ — параллелограмм. Докажите, что $\overrightarrow{HO}+\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{KP}=\overrightarrow{PK}+\overrightarrow{MP}$.

51.5. 1) Постройте вектор $\vec{a}+\vec{y}$ (рис. 179). В случае а) построение выполните двумя способами.

2) Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $\vec{a}$ и $\vec{c}$ равен 120°, $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|$ (рис. 180). Докажите, что $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$.

51.6. 1) Постройте вектор $\vec{k}+\vec{p}$ (рис. 181). Для случая а) построение выполните двумя способами.

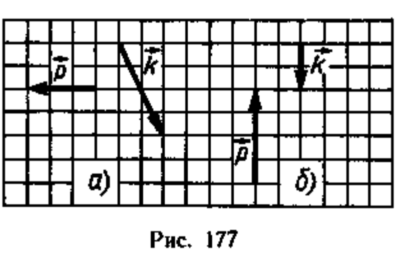

Рис. 177

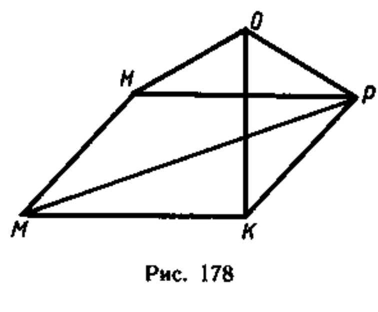

Рис. 178

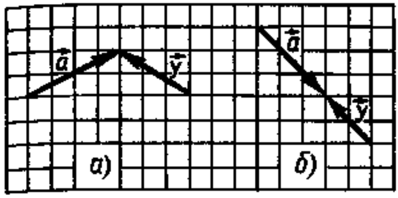

Рис. 179

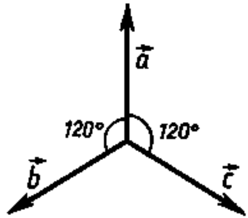

Рис. 180

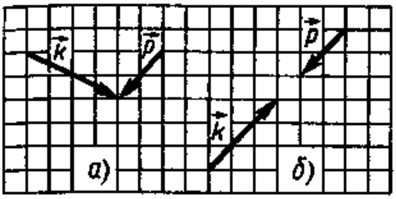

Рис. 181

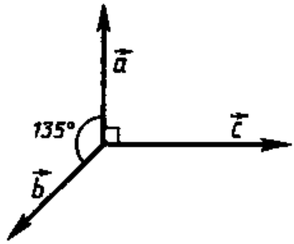

Рис. 182

2) Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{c}$ равен 90°, а между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ 135° (рис. 182), $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, $|\vec{c}| = \sqrt{2}$. Докажите, что $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$.

§ 52. ВЫЧИТАНИЕ ВЕКТОРОВ

52.1. 1) Постройте вектор $\vec{a} - \vec{c}$ (рис. 183).
2) Даны треугольник ABC и точка M на отрезке BC. Выразите:

а) вектор $\overrightarrow{CB}$ через векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AB}$;

б) вектор $\overrightarrow{MA}$ через векторы $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BM}$.

52.2. 1) Постройте вектор $\vec{k} - \vec{p}$ (рис. 184).
2) Даны треугольник ABC и точка E на стороне AB. Выразите:

а) вектор $\overrightarrow{BA}$ через векторы $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{CA}$;

б) вектор $\overrightarrow{BE}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AE}$.

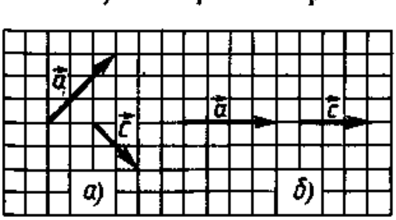

Рис. 183

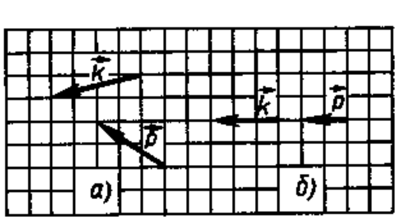

Рис. 184

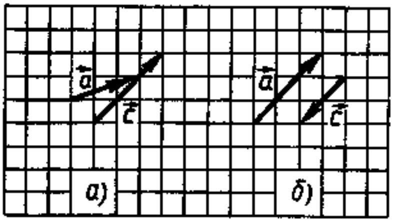

Рис. 185

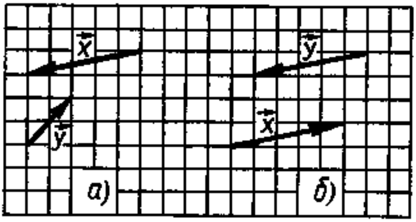

Рис. 186

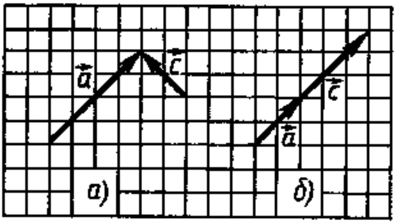

Рис. 187

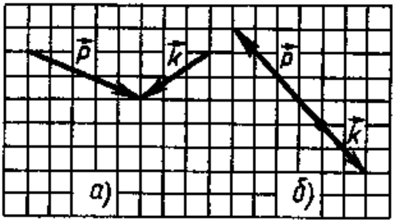

Рис. 188

52.3. 1) Постройте вектор $\vec{a}-\vec{c}$ (рис. 185). В случае а) построение выполните двумя способами.

2) Дан параллелограмм $ABCD$, $\overrightarrow{CA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CD}=\vec{c}$. Выразите векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DA}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$.

52.4. 1) Постройте вектор $\vec{x}-\vec{y}$ (рис. 186). Для случая а) построение выполните двумя способами.

2) Дан параллелограмм $ABCD$, $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BD}=\vec{c}$. Выразите векторы $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DA}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$.

52.5. 1) Постройте вектор $\vec{a}-\vec{c}$ (рис. 187). Для каждого случая построения выполните двумя способами.

2) Даны параллелограмм $ABCD$ и произвольная точка O. Выразите вектор $\overrightarrow{OA}$ через векторы $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$.

52.6. 1) Постройте вектор $\vec{p}-\vec{k}$ (рис. 188). Для каждого случая построения выполните двумя способами.

2) В четырехугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке O и выполняется равенство $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}$. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

53.1. 1) Постройте вектор $\vec{k}=\vec{a}+\vec{p}-\vec{c}$ (рис. 189).
2) В равнобедренном треугольнике ABC точка M — середина основания AC.
а) Упростите выражение $\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{BA}$.
б) Найдите $|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{BA}|$, если $AB=5$ см, $BM=4$ см.

53.2. 1) Постройте вектор $\vec{k}=\vec{a}-\vec{p}+\vec{c}$ (рис. 190).
2) Отрезок CM — медиана, проведенная из вершины прямого угла равнобедренного треугольника ABC.
а) Упростите выражение $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BM}$.
б) Найдите $|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BM}|$, если $AB=10$.

53.3. 1) Постройте вектор $\vec{k}=\vec{a}-\vec{p}+\vec{c}$ (рис. 191).
2) В прямоугольнике $ABCD$ $AD=12$ см, $CD=5$ см, O — точка пересечения диагоналей. Найдите $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{OD}|$.

53.4. 1) Постройте вектор $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$ (рис. 192).
2) $ABCD$ — ромб, $AD=20$ см, $BD=24$ см, O — точка пересечения диагоналей. Найдите $|\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{OB}|$.

53.5. 1) Для точек A, B, C, D, E, изображенных на рисунке 193, выполняется равенство $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\vec{x}=\overrightarrow{DE}$. Постройте вектор $\vec{x}$.
2) В трапеции $ABCD$ с прямым углом A проведена диагональ AC, $\angle BCA=45°$, $\angle ACD=90°$, $AC=a$. Найдите $|\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CD}|$.

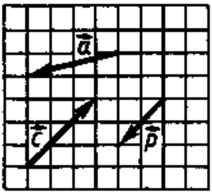

Рис. 189

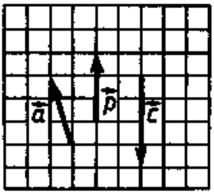

Рис. 190

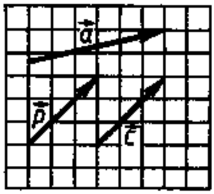

Рис. 191

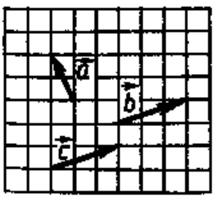

Рис. 192

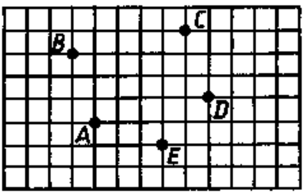

Рис. 193

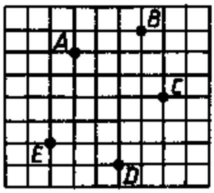

Рис. 194

53.6. 1) Для точек A, B, C, D, E, изображенных на рисунке 194, выполняется равенство $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{DE}-\vec{x}=\overrightarrow{AE}$. Постройте вектор $\vec{x}$.

2) В трапеции $PKHM$ с прямым углом P проведена диагональ HP, $\angle PHK=30°$, $\angle PHM=90°$. Найдите $|\overrightarrow{KP}+\overrightarrow{MK}-\overrightarrow{MH}|$, если $PM=a$.

§ 54. УМНОЖЕНИЕ ВЕКТОРА НА ЧИСЛО

54.1. 1) Начертите вектор $\vec{a}$, длина которого равна 3 см. Постройте с помощью масштабной линейки векторы $2\vec{a}$, $\frac{1}{3}\vec{a}$.

2) В параллелограмме $ABCD$ O — точка пересечения диагоналей, K — середина стороны CD. Выразите векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{AK}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.

54.2. 1) Начертите вектор $\vec{p}$, длина которого равна 2 см. Постройте с помощью масштабной линейки векторы $3\vec{p}$, $-2\vec{p}$.

2) В параллелограмме $ABCD$ P — точка пересечения диагоналей, M — середина стороны BC. Выразите векторы $\overrightarrow{DP}$ и $\overrightarrow{DM}$ через векторы $\overrightarrow{DA}$ и $\overrightarrow{DC}$.

54.3. 1) Начертите два неколлинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{p}$, начала которых не совпадают, и $|\vec{a}|=2$ см, $|\vec{p}|=5$ см. С помощью чертежного угольника и масштабной линейки постройте вектор $3\vec{a}+2\vec{p}$.

2) На стороне BC параллелограмма $ABCD$ взята точка K так, что $BK:KC=1:4$. Выразите векторы $\overrightarrow{AK}$ и $\overrightarrow{KD}$ через векторы $\overrightarrow{AB}=\vec{p}$ и $\overrightarrow{AD}=\vec{k}$.

54.4. 1) Начертите два неколлинеарных вектора $\vec{x}$ и $\vec{y}$, начала которых не совпадают, и $|\vec{x}|=1$ см, $|\vec{y}|=3$ см. С помощью масштабной линейки и чертежного угольника постройте вектор $3\vec{x}-4\vec{y}$.

2) На стороне HK ромба $MHKC$ взята точка E так, что $KE=\frac{1}{5}HE$, T — середина MH. Выразите векторы $\overrightarrow{CE}$ и $\overrightarrow{ET}$ через векторы $\overrightarrow{CK}=\vec{p}$ и $\overrightarrow{CM}=\vec{k}$.

54.5. 1) Начертите два неколлинеарных вектора $\vec{p}$ и $\vec{k}$, концы которых совпадают. С помощью циркуля, чертежного угольника и линейки без делений постройте вектор $2\vec{p}+\frac{1}{3}\vec{k}$.

2) Точка M лежит на диагонали AC параллелограмма $ABCD$, а точка H — на его стороне AD, причем

$AM:MC=2:1$, $AH=HD$. Выразите вектор $\overrightarrow{MH}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{p}$, где $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{p}=\overrightarrow{AD}$.

54.6. 1) Начертите два неколлинеарных вектора $\vec{x}$ и $\vec{y}$, концы которых совпадают. С помощью циркуля, чертежного угольника и линейки без делений постройте вектор $\frac{1}{5}\vec{x}-\vec{y}$.
2) Точка T лежит на стороне BC параллелограмма $ABCD$, а точка E — на его диагонали BD, причем $BE:ED=2:1$, $BT=TC$. Выразите вектор $\overrightarrow{ET}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{p}$, где $\vec{a}=\overrightarrow{DA}$, $\vec{p}=\overrightarrow{DC}$.

§ 55. ПРИМЕНЕНИЕ ВЕКТОРОВ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

55.1. 1) Точка M — середина отрезка AB. Выразите:
а) вектор $\overrightarrow{AM}$ через вектор $\overrightarrow{MB}$;
б) вектор $\overrightarrow{AB}$ через вектор $\overrightarrow{MB}$;
в) вектор $\overrightarrow{AM}$ через вектор $\overrightarrow{BA}$.
2) В четырехугольнике $ABCD$ $AD=9$ см, $\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$. Найдите длину отрезка, соединяющего середины сторон AB и CD четырехугольника.

55.2. 1) Точка C делит отрезок MH в отношении $1:3$, считая от точки M. Выразите:
а) вектор $\overrightarrow{MC}$ через вектор $\overrightarrow{CH}$;
б) вектор $\overrightarrow{MH}$ через вектор $\overrightarrow{CM}$;
в) вектор $\overrightarrow{MC}$ через вектор $\overrightarrow{HM}$.
2) В четырехугольнике $ABCD$ $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$. Найдите углы B, C и D четырехугольника, если $\angle A=15°$.

55.3. 1) Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Найдите x, если:
а) $\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{AO}$; б) $\overrightarrow{BO}=x\overrightarrow{DB}$; в) $\overrightarrow{AB}=x\overrightarrow{CD}$.
2) На сторонах AB и BC треугольника ABC отмечены соответственно точки M и H так, что $AB=3BM$, $BC=3BH$. Используя векторы, докажите, что $MH \parallel AC$ и $MH=\frac{1}{3}AC$.

55.4. 1) Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Найдите y, если:
а) $\overrightarrow{BD}=y\overrightarrow{BO}$; б) $\overrightarrow{AD}=y\overrightarrow{BC}$; в) $\overrightarrow{AO}=y\overrightarrow{CO}$.
2) Отрезки BA и CD пересекаются в точке O. Причем $AO=2OB$, $OD=2OC$. Используя векторы, докажите, что $BC \parallel AD$, $BC=\frac{1}{2}AD$.

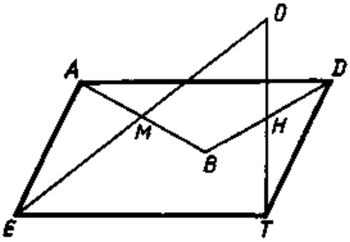

Рис. 195

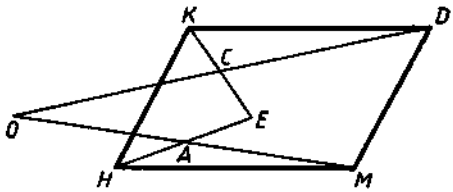

Рис. 196

55.5. 1) Векторы $\vec{a}$ и $\vec{p}$ неколлинеарны. Существует ли такое число α, что $\vec{a}=\alpha\vec{p}$?

2) Точка O — произвольная точка плоскости, $AETD$ — четырехугольник, M — середина отрезков AB и EO, а H — середина отрезков BD и OT (рис. 195). Используя векторы, докажите, что $AETD$ — параллелограмм.

55.6. 1) $\vec{a}$ и $\vec{p}$ — неколлинеарные векторы, $\alpha\vec{a}=\beta\vec{p}$. Найдите числа α и β.

2) $HKDM$ — параллелограмм, точка A — середина отрезков OM и HE (рис. 196). Используя векторы, докажите, что точки O и E равноудалены от прямой KD.

55.7*. 1) Точка O — точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$. Точка K лежит на стороне BC, а точка E — на стороне AD, причем $BK:KC=DE:AE=1:2$. Используя векторы, докажите, что точка O является серединой отрезка KE.

2) Используя векторы, докажите, что в любом треугольнике медианы пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении $2:1$, считая от вершины.

55.8*. 1) Точка A_1 лежит на стороне BC, а точка B_1 — на стороне AC треугольника ABC, O — точка пересечения отрезков AA_1 и BB_1, причем $AO:OA_1=BO:OB_1=2:1$. Используя векторы, докажите, что отрезки AA_1 и BB_1 являются медианами треугольника ABC.

2) Используя векторы, докажите, что диагонали параллелограмма пересекаются и в точке пересечения делятся пополам.

§ 56. СРЕДНЯЯ ЛИНИЯ ТРАПЕЦИИ

56.1. 1) Разность оснований трапеции равна 4 см, а средняя линия равна 10 см. Найдите основания трапеции.

2) В равнобедренной трапеции $ABCD$ перпендикуляр, проведенный из вершины B на большее основание AD трапеции, делит его на отрезки, равные 4 и 10 см. Найдите основания и среднюю линию трапеции.

56.2. 1) В трапеции одно из оснований больше другого в 2 раза. Средняя линия трапеции равна 15 см. Найдите основания трапеции.

2) В равнобедренной трапеции $MHKP$ проведен перпендикуляр HE к большему основанию MP, $ME=6$ см, $HK=10$ см. Найдите большее основание и среднюю линию трапеции.

56.3. 1) В трапеции $ABCD$ $AD \parallel BC$, $\angle A=90°$, $\angle C=135°$, $AB=2$ см. Найдите среднюю линию трапеции, если известно, что ее диагональ перпендикулярна боковой стороне.
2) В равнобедренной трапеции острые углы равны 60°, боковая сторона равна 10 см, а большее основание 15 см. Найдите меньшее основание и среднюю линию трапеции.

56.4. 1) В трапеции $MHKP$ $MP \parallel HK$, $\angle M=90°$, $\angle K=150°$, $HK=2$ см. Найдите среднюю линию трапеции, если известно, что ее диагональ перпендикулярна боковой стороне.
2) В равнобедренной трапеции острые углы равны 45°, меньшее основание равно 5 см, а расстояние между основаниями 4 см. Найдите большее основание и среднюю линию трапеции.

56.5. 1) В равнобедренной трапеции диагональ, равная 4 см, составляет с основанием угол 60°. Найдите среднюю линию трапеции.
2) Докажите, что если трапецию можно разделить двумя прямыми на три равносторонних треугольника, то средняя линия такой трапеции в полтора раза больше меньшего основания.

56.6. 1) В равнобедренной трапеции диагональ составляет с основанием угол 45°. Расстояние между основаниями трапеции равно 8 см. Найдите среднюю линию трапеции.
2) Докажите, что если трапецию можно разделить одной прямой на ромб и равносторонний треугольник, то средняя линия такой трапеции составляет $\frac{3}{4}$ большего основания.

ИТОГОВОЕ ПОВТОРЕНИЕ

§ 57. МНОГОУГОЛЬНИКИ. ПЛОЩАДИ. ВЕКТОРЫ

57.1. Сторона квадрата $ABCD$ равна 4 см. На AB и CD отложены отрезки AM и KC так, что $AM=KC=3$.
а) Докажите, что $MBKD$ — параллелограмм.
б) Найдите его периметр и площадь.
в) Выразите вектор $\overrightarrow{BD}$ через векторы $\overrightarrow{BM}$ и $\overrightarrow{BC}$.

57.2. Сторона квадрата $MKPT$ равна 12 см. На MT и KP отложены отрезки AT и KB так, что $AT=KB=5$ см.
а) Докажите, что $AMBP$ — параллелограмм.
б) Найдите его периметр и площадь.
в) Выразите вектор $\overrightarrow{PM}$ через векторы $\overrightarrow{PB}$ и $\overrightarrow{PT}$.

57.3. В прямоугольнике $ABCD$ $AB=8$ см, $BC=4$ см. На сторонах AB и CD взяты соответственно точки K и P так, что $AK:AB=CP:CD=3:8$.

а) Докажите, что $KBPD$ — ромб.

б) Найдите его периметр и площадь.

в) Выразите вектор $\overrightarrow{BD}$ через векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BK}$.

57.4. В прямоугольнике $ABCD$ $AB=18$ см, $AD=12$ см. На сторонах AB и CD взяты соответственно точки T и K так, что $BT:AT=DK:KC=5:13$.

а) Докажите, что $ATCK$ — ромб.

б) Найдите его периметр и площадь.

в) Выразите вектор $\overrightarrow{CA}$ через векторы $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{CT}$.

57.5. В ромбе $ABCD$ $AB=5$ см, $BD=2\sqrt{5}$ см. На сторонах AB и CD взяты соответственно точки M и K так, что $AM:MB=CK:KD=1{,}5$.

а) Докажите, что $MBKD$ — прямоугольник.

б) Найдите его периметр и площадь.

в) Выразите вектор $\overrightarrow{KM}$ через векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BA}$.

57.6. В ромбе $KPTM$ $KP=13$ см, $PM=4\sqrt{13}$ см. На сторонах KM и PT взяты соответственно точки A и B так, что $AM:KA=PB:BT=1{,}6$.

а) Докажите, что $APBM$ — прямоугольник.

б) Найдите его периметр и площадь.

в) Выразите вектор $\overrightarrow{PM}$ через векторы $\overrightarrow{MA}$ и $\overrightarrow{MT}$.

§ 58. РЕШЕНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ. ПОДОБИЕ

58.1. В прямоугольнике $ABCD$ на сторонах BC и AD взяты соответственно точки M и K так, что $\angle BAM=40°$, $\angle DCK=50°$. Известно, что $CK=8$ см, $BC=20$ см.

а) Докажите, что $BM:CD=AM:KC$.

б) С помощью микрокалькулятора вычислите отрезки KD, CD, BM и площадь четырехугольника $AMCK$.

58.2. Дан квадрат $ABCD$. На стороне CD взята точка P, а на продолжении стороны AB за вершину A — точка E, $\angle PBC=35°$, $\angle ADE=55°$, $ED=5$ см.

а) Докажите, что $BP:DE=AD:PC$.

б) С помощью микрокалькулятора вычислите отрезки AE, AD, PC и площадь четырехугольника $DPBE$.

58.3. В прямоугольнике $ABCD$ точка M делит сторону AB в отношении $2:1$, считая от вершины A. Прямые MD и BC пересекаются в точке E, $\angle MDA=40°$, $AD=10$ см.

а) Докажите, что треугольники AMD и ECD подобны.

б) С помощью микрокалькулятора вычислите площадь треугольника DCE.

2) На стороне BC треугольника ABC отмечена точка E. Через эту точку проведены прямые, параллельные другим сторонам треугольника, пересекающие отрезки AC и AB в точках P и H соответственно.

а) Докажите, что $HE \cdot EP = PC \cdot BH$.

б) Найдите $\sin \angle EPC$, если $\cos \angle BHE = \frac{12}{13}$.

58.4. 1) Дан прямоугольник $ABCD$. Сторона DC продолжена за точку C. На этом продолжении отмечена точка P так, что $\angle PAB = 50°$, H — точка пересечения отрезков PA и BC и $BH:HC = 3:2$, $AH = 10$ см.

а) Докажите, что треугольники ABH и APD подобны.

б) С помощью микрокалькулятора вычислите площадь треугольника APD.

2) Через вершину C параллелограмма $ABCD$ проведена прямая HP так, что точка C лежит между точками H и P, которые принадлежат прямым AB и AD соответственно.

а) Докажите, что $BH \cdot DP = BC \cdot CD$.

б) Найдите $\cos \angle CDP$, если $\sin \angle HBC = \frac{3}{5}$.

58.5. 1) В трапеции $ABCD$ диагональ BD является ее высотой, $BC = 3$ мм, $AC = 10$ мм, O — точка пересечения диагоналей, $BO:OD = 1:2$. С помощью микрокалькулятора вычислите $\angle AOD$.

2) В треугольнике ABC на сторонах AB и BC взяты точки D и E так, что $BD = 4$ мм, $\angle EDB = \angle C$. Высота треугольника BK равна 16 мм, $\cos \angle C = \frac{3}{5}$. Найдите отношение площадей треугольников DBE и ABC.

58.6. 1) В параллелограмме $ABCD$ диагональ BD перпендикулярна стороне BC. На стороне BC выбрана точка E. Отрезки AE и BD пересекаются в точке O, причем $BO:OD = 2:3$, $BC = 9$ см и $AE = 20$ см. С помощью микрокалькулятора вычислите $\angle AOD$.

2) В треугольнике ABC на сторонах BC и AC отмечены соответственно точки H и P так, что $PC = 8$ см, $\angle HPC = \angle ABC$. Площади треугольников PHC и ABC относятся как $4:25$, $\cos \angle C = \frac{4}{5}$. Найдите высоту BE треугольника ABC.

58.7*. 1) В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) $\angle ABC = \angle ACD$, $BC = 2$ см, $AD = 8$ см, $\angle CAD = 40°$. Используя микрокалькулятор, найдите площадь трапеции.

2) В параллелограмме $ABCD$ угол A острый. Из вершины A проведены высоты параллелограмма AM и AH к сторонам BC и CD соответственно, $MH:AC = 3:4$. Найдите отношение площадей треугольников MAH и ABC.

58.8*. 1) В треугольнике ABC $\angle ABC = 130°$. На стороне AC выбрана точка D так, что $CD = 4$ см и $\angle BDC = \angle ABC$, $AC = 9$ см. Используя микрокалькулятор, найдите площадь $\triangle BDC$.

2) В параллелограмме $ABCD$ угол A острый, BM и BH — высоты параллелограмма, проведенные к сторонам AD и DC соответственно, $MH:BD = 2:3$. Найдите отношение площадей треугольников MBH и BDC.

59.1. 1) Через точку A, лежащую на окружности радиусом 10 см с центром O, проведена касательная AM. Отрезок OM пересекает окружность в точке B. Найдите градусную меру меньшей из дуг AB, если $AM=10\sqrt{3}$ см.

2) Треугольник вписан в окружность так, что одна из его сторон проходит через центр окружности, а две другие удалены от него на 3 и $3\sqrt{3}$ см. Найдите радиус окружности.

59.2. 1) Отрезок AB — диаметр некоторой окружности радиусом 5 см, прямая BC — касательная к ней, $AC=10\sqrt{2}$ см. Найдите градусную меру дуги данной окружности, заключенной внутри треугольника ABC.

2) В треугольник ABC, в котором $\angle A=90°$, вписана окружность с центром O. Найдите отрезки, на которые точка касания этой окружности и прямой AC делит сторону AC, если $OC=5$ дм, $AO=3\sqrt{2}$ дм.

59.3. 1) Через концы хорды AB окружности с центром O проведены касательные, пересекающиеся в точке M. Найдите градусную меру меньшей из дуг AB, если $AM=10$ см, а периметр четырехугольника $OAMB$ равен 40 см.

2) Диагональ трапеции составляет с большим основанием угол 30°, а центр окружности, описанной возле трапеции, принадлежит этому основанию. Найдите площадь трапеции, если ее боковая сторона равна 2 см.

59.4. 1) Из точки A проведены две касательные AB и AD к некоторой окружности радиусом 5 см (B и D — точки касания). Точка C принадлежит большей из дуг BD. Найдите $\angle BCD$, если $AB=5$ см.

2) В некоторой трапеции один из углов прямой, а другой равен 30°. Бóльшая боковая сторона трапеции равна 12 см. Найдите площадь трапеции, если известно, что в нее можно вписать окружность.

59.5. 1) AB и AC — касательные к окружности с центром O (C и B — точки касания). Найдите градусную меру меньшей из дуг BC, если расстояние от центра окружности до точки A равно 8 см, а до хорды BC 6 см.

2) Где — внутри трапеции, вне или на основании — расположен центр окружности, описанной около равнобедренной трапеции с основаниями 10 см, 24 см и высотой 17 см?

59.6. 1) Из точки A к окружности диаметром BC проведена касательная AC. Отрезок AB пересекается с окружностью в точке D, $AD=2$ см, $BD=6$ см. Найдите градусную меру дуги окружности, заключенной внутри треугольника ABC.

2) В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ угол A прямой. Диагональ BD образует со сторонами BC, CD и AD углы 90°, 45°, 30° соответственно. Могут ли биссектрисы углов данного четырехугольника пересекаться в одной точке?

МЕТОД КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ

§ 60. КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА

60.1. 1) Даны векторы $\vec{a}\{1; 6\}$, $\vec{b}\{-5; 7\}$. Найдите координаты векторов $\vec{c}=2\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{d}=\vec{b}-\vec{a}$.

2) Найдите среди векторов $\vec{a}\{2; 1{,}5\}$, $\vec{b}\{3; -1\}$, $\vec{c}\{4{,}4; 3{,}3\}$, $\vec{d}\{-15; 5\}$ пары коллинеарных.

60.2. 1) Даны векторы $\vec{m}\{7; 5\}$ и $\vec{n}\{-6; 2\}$.Найдите координаты векторов $\vec{k}=3\vec{m}-\vec{n}$ и $\vec{p}=\vec{m}+\vec{n}$.

2) Найдите среди векторов $\vec{m}\{3; 2\}$, $\vec{n}\left\{2\frac{1}{3}; -1\right\}$, $\vec{p}\{7; -3\}$, $\vec{k}\{4; 11\}$ пары неколлинеарных.

60.3. 1) Даны векторы $\vec{a}\{1; 4\}$, $\vec{b}\{1; 2\}$, $\vec{c}\{7; 2\}$. Запишите разложение вектора $\vec{d}=3\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}$ по координатным векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$.

2) Найдите среди векторов $\vec{a}\{2; 0\}$, $\vec{b}\{0; 3\}$, $\vec{c}\{-5; 0\}$, $\vec{d}\{0; -18\}$ пары коллинеарных.

60.4. 1) Даны векторы $\vec{m}\{-1; -7\}$, $\vec{n}\{-1; 7\}$, $\vec{k}\{1; 7\}$. Запишите разложение вектора $\vec{p}=\vec{m}+3\vec{n}-2\vec{k}$ по координатным векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$.

2) Найдите среди векторов $\vec{m}\{-7; 0\}$, $\vec{n}\{0; 5\}$, $\vec{p}\{6; 1\}$, $\vec{k}\{21; 0\}$ пары неколлинеарных.

60.5. 1) В треугольнике ABC $\overrightarrow{AB}\{-2; 1\}$, $\overrightarrow{AC}\{-4; 2\}$. Запишите разложение вектора $\overrightarrow{AO}$ по координатным векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$, если O есть точка пересечения медиан треугольника ABC.

2) Найдите угол между векторами $\vec{a}\{3; 3\}$ и $\vec{c}\{3; -3\}$.

60.6. 1) Даны векторы $\overrightarrow{AC}\{4; 10\}$ и $\overrightarrow{AM}\{-3; -1\}$. Известно, что M — середина некоторого отрезка BC. Найдите разложение вектора $\overrightarrow{BA}$ по координатным векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$.

2) Найдите угол между векторами $\vec{k}\{-2; 2\}$ и $\vec{p}\{2; -2\}$.

§ 61. ПРОСТЕЙШИЕ ЗАДАЧИ В КООРДИНАТАХ

61.1. 1) Найдите координаты середины отрезка с концами $A(1; 3)$, $B(3; 1)$.

2) Точка A лежит на положительной полуоси абсцисс и удалена от начала координат на 2. Точка B имеет координаты (14; 5). Найдите расстояние AB.

61.2. 1) Даны точки $P(2; 2)$ и $H(6; 6)$. Найдите координаты точки M, делящей отрезок PH пополам.

2) Точка C имеет координаты (5; 15), а точка D лежит на положительной полуоси ординат и удалена от начала координат на 3. Найдите расстояние CD.

61.3. Даны точки $A(1; 2)$ и $B(0; 0)$. Найдите координаты точки C, если известно, что точка B есть середина отрезка AC.
2) На оси абсцисс найдите точку, равноудаленную от точки $A(1; 2)$ и начала координат.

61.4. 1) Начало координат делит отрезок AM пополам. Найдите координаты точки M, если координаты точки A равны $(4; 4)$.
2) На оси ординат найдите точку, равноудаленную от точки $M(-1; -3)$ и начала координат.

61.5. 1) Точки A и B имеют координаты $A(1; 2)$, $B(7; 10)$. Найдите координаты $(x; y)$ точки C, делящей отрезок AB в отношении $1:3$, считая от точки A.
2) Лежат ли точки $A(-3; 2)$, $B(2; 2)$, $C(2; 14)$ на одной прямой?

61.6. 1) Точка M принадлежит отрезку PK, причем $PM:MK = 2:1$. Найдите координаты точки K, если координаты точек P и M равны $(6; 3)$ и $(14; 9)$ соответственно.
2) Принадлежит ли точка $H(3; -5)$ отрезку MP, если $M(1; -2)$, $P(5; -8)$?

61.7*. 1) Координаты всех вершин некоторого треугольника — четные числа. Докажите, что площадь этого треугольника выражается натуральным числом.
2) Используя формулы метода координат, найдите пару чисел x, y, удовлетворяющих условию $\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{x^2+(y-1)^2}$.

61.8*. 1) Координаты вершин A и B квадрата $ABCD$ — целые числа. Докажите, что координаты точек C и D также целые числа.
2) Используя формулы метода координат, решите систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{x^2+(y-1)^2} = \sqrt{(x-1)^2+y^2}, \\ \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}. \end{cases}$

§ 62. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КООРДИНАТ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

62.1. 1) Треугольник задан координатами своих вершин $A(4; 2)$, $B(0; -6)$, $C(-4; -2)$. Докажите, что этот треугольник равнобедренный.
2) В равнобедренном треугольнике ABC основание равно 12, а высота OB равна 4. Найдите длину медианы, проведенной из вершины A.

62.2. 1) Даны точки $M(3; 1)$, $K(0; 0)$, $P(0; 2)$. Будет ли треугольник MPK равносторонним?
2) В равнобедренном треугольнике PKH медиана KM, проведенная к основанию, равна 8. Найдите длину медианы, проведенной из вершины H, если $HP = 20$.

62.3. 1) Четырехугольник $ABCD$ задан координатами своих вершин $A(-5;\ 0)$, $B(-3;\ 3)$, $C(2;\ 3)$, $D(4;\ 0)$.
а) Докажите, что этот четырехугольник — трапеция.
б) Равны ли углы BAD и CDA?
2) В треугольнике ABC проведена высота BH. Найдите длину медианы, проведенной из вершины A, если $\angle ABH=45°$, $BH=6$, $HC=8$.

62.4. 1) Даны точки $M(0;\ 4)$, $P(2;\ 1)$, $K(2;\ -2)$, $T(0;\ -5)$.
а) Докажите, что четырехугольник $MPKT$ — трапеция.
б) Равны ли углы MPK и PKT?
2) В треугольнике MKP с углом M, равным 45°, высота KH делит сторону MP на отрезки 4 и 6, считая от вершины M. Найдите длину медианы, проведенной из вершины M.

62.5. 1) Треугольник задан координатами своих вершин $A(2;\ 2\sqrt{3})$, $B(0;\ 0)$, $C(3;\ \sqrt{3})$. Найдите углы треугольника ABC.
2) В треугольнике ABC $AB=4$, $AC=6$, $\angle A=60°$. Найдите медиану, проведенную из вершины A.

62.6. 1) Даны точки $A(4;\ 1)$, $B(7;\ 3)$, $C(2;\ 4)$. Найдите углы треугольника ABC.
2) В треугольнике KHP $KH=8\sqrt{2}$, $KP=18$, $\angle K=45°$. Найдите медиану, проведенную из вершины K.

62.7*. В прямоугольнике $ABCD$ точка K делит диагональ BD в отношении $2:1$, считая от вершины B. Точка E — середина стороны CD. Используя метод координат, докажите, что точка K принадлежит отрезку AE и делит его в отношении $1:2$.

62.8*. В ромбе $MTHD$ точка K принадлежит диагонали TD. $TK:KD=2:1$. Точка E делит отрезок HD пополам. Используя метод координат, докажите, что точка K принадлежит отрезку ME и делит его в отношении $1:2$.

§ 63. УРАВНЕНИЕ ОКРУЖНОСТИ

63.1. 1) Постройте окружность, заданную уравнением
$$(x-3)^2+(y+2)^2=4.$$
2) Окружность с центром в точке $O(-4;\ 2)$ пересекает ось ординат в точке $A(0;\ 5)$. Напишите уравнение этой окружности.

63.2. 1) Постройте окружность, заданную уравнением
$$(x+2)^2+(y-1)^2=9.$$
2) Окружность с центром в точке $O(2;\ -4)$ пересекает ось абсцисс в точке $A(5;\ 0)$. Напишите уравнение этой окружности.

63.3. 1) Постройте окружность, заданную уравнением
$$x^2+(y+3)^2=9.$$

2) Окружность проходит через точки $A(2; 0)$ и $B(-2; 6)$. Напишите уравнение этой окружности, если известно, что ее центр лежит на прямой AB.

63.4. 1) Постройте окружность, заданную уравнением

$$(x+2)^2+y^2=4.$$

2) Отрезок MH является диаметром окружности. Напишите уравнение этой окружности, если известно, что точки M и H имеют координаты $(0; 2)$ и $(6; -2)$ соответственно.

63.5. Докажите, что линия, заданная уравнением $x^2+6x+y^2=0$, является окружностью. Является ли отрезок AB, где $A(-1; \sqrt{5})$ и $B(-5; -\sqrt{5})$, диаметром этой окружности?

63.6. Докажите, что линия, заданная уравнением $x^2+y^2-6y-7=0$, является окружностью. Является ли отрезок CD, где $C(2; 2\sqrt{3}+3)$ и $D(-2; 3-2\sqrt{3})$, диаметром этой окружности?

§ 64. УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМОЙ И ОКРУЖНОСТИ

64.1. 1) Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $A(9; 3)$ и перпендикулярной оси Ox.

2) Прямая задана уравнением $2x-3y+15=0$. Принадлежат ли точки $M(3; 7)$ и $H(5; -6)$ этой прямой?

3) Выясните взаимное расположение прямой $x=19$ и окружности $(x-7)^2+(y+6)^2=81$.

64.2. 1) Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $B(-3; 10)$ и перпендикулярной оси Oy.

2) Принадлежат ли точки $A(3; -5)$ и $B(4; 2)$ прямой $7x-5y-18=0$?

3) Выясните взаимное расположение прямой $y=30$ и окружности $(x-5)^2+(y-10)^2=100$.

64.3. 1) Найдите площадь треугольника, который образуется при пересечении прямой $2x+y+4=0$ с осями координат.

2) Напишите уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку $A(2; -10)$.

3) Выясните взаимное расположение прямой $x=10$ и окружности $(x-1)^2+(y-30)^2=81$. Найдите расстояние от центра окружности до прямой.

64.4. 1) Найдите площадь треугольника, который образуется при пересечении прямой $y-3x+6=0$ с осями координат.

2) Запишите уравнение прямой, проходящей через точки $A(-2; -9)$ и $B(0; 0)$.

3) Выясните взаимное расположение прямой $y=27$ и окружности $(x+5)^2+(y-17)^2=100$. Найдите расстояние от центра окружности до прямой.

64.5. 1) Найдите площадь треугольника, который образуется при пересечении прямых $2x+y+4=0$, $x=-1$ и оси абсцисс.

2) Напишите уравнение прямой, проходящей через точки $A(1;\ 10)$ и $B(-1;\ -4)$.

3) Выясните взаимное расположение прямой $x+y=1$ и окружности $x^2+y^2=1$. Найдите расстояние от центра окружности до прямой.

64.6. 1) Найдите площадь треугольника, который образуется при пересечении прямых $y-3x+6=0$, $y=3$ и оси ординат.

2) Даны точки $M(7;\ 3)$, $P(-1;\ -2)$. Напищите уравнение прямой MP.

3) Выясните взаимное расположение прямой $y-x-1=0$ и окружности $x^2+y^2=1$. Найдите расстояние от центра окружности до прямой.

64.7*. Даны две точки A и B, расстояние между которыми равно 4. Найдите множество всех точек M, для которых $MA^2+MB^2=10$.

64.8*. Даны две точки A и B, расстояние между которыми равно 4. Найдите множество точек M, для которых $MA^2-MB^2=4$.

РЕШЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

§ 65. ПЛОЩАДЬ ТРЕУГОЛЬНИКА

65.1. 1) Найдите площадь равнобедренного треугольника, если его боковая сторона равна 1 м, а угол при вершине равен 45°.

2) Площадь параллелограмма с углом 60° равна $25\sqrt{3}$ см². Найдите его периметр, если длина одной стороны 10 см.

65.2. 1) Найдите площадь равностороннего треугольника со стороной, равной 1 м.

2) В параллелограмме одна сторона равна 10 см, а угол равен 135°. Найдите периметр параллелограмма, если его площадь равна $50\sqrt{2}$ см².

65.3. 1) В треугольнике ABC CD — медиана. Найдите площадь треугольника BDC, если $AC=10$ см, $BC=20$ см и $\angle ACB=135°$.

2) Найдите площадь параллелограмма, если его диагонали равны 8 и 10 см и угол между ними равен 60°.

65.4. 1) В треугольнике EPM PK — медиана. Найдите площадь треугольника EKP, если $EP=10$ см, $PM=16$ см и $\angle EPM=120°$.

2) Диагонали параллелограмма равны 6 и 10 см, а угол между ними 45°. Найдите площадь параллелограмма.

65.5. 1) Центр описанной вокруг треугольника ABC окружности лежит вне треугольника, и угол A наибольший. Найдите угол A, если $AB=3$ см, $AC=4$ см и площадь треугольника равна 3 см².

2) В равнобедренной трапеции $ABCD$ с бо́льшим основанием AD диагонали пересекаются в точке O. Найдите площадь трапеции, если $\angle AOB=45°$, а диагональ равна c.

65.6. 1) Точка пересечения прямых, содержащих высоты треугольника ABC, находится вне этого треугольника, и угол C наибольший. Найдите величину угла C, если площадь треугольника равна $2\sqrt{3}$ см^2, а $AC=2$ см, $BC=4$ см.
2) Диагональ равнобедренной трапеции длиной a образует с основанием угол 75°. Найдите площадь трапеции.

65.7*. В треугольнике ABC $AB=a$, $BC=b$, $\angle ABC=\alpha$. Точка D лежит на стороне AC, $\angle ABD=\beta$. Найдите длину отрезка BD.

65.8*. В треугольнике ABC точка D лежит на стороне AC. $BD=m$, $BC=n$, $\angle ABD=\alpha$, $\angle DBC=\beta$. Найдите AB.

§ 66. ТЕОРЕМА СИНУСОВ

66.1. 1) В треугольнике ABC $AC=0{,}59$ дм, $\angle A=40°$, $\angle C=35°$. С помощью микрокалькулятора вычислите BC.
2) В равнобедренном треугольнике ABC длина основания AB равна $\sqrt{2}$, угол при основании равен 30°, AD — биссектриса. Найдите AD.

66.2. 1) В треугольнике EKP $EP=0{,}75$ см, $\angle P=40°$, $\angle K=20°$. С помощью микрокалькулятора вычислите PK.
2) В треугольнике ABC $\angle C=90°$, $\angle A=15°$, CD — биссектриса. Найдите AD, если $AC=\sqrt{3}$.

66.3. 1) В параллелограмме $ABCD$ $\angle D=120°$, $\angle BDA=40°$, $BD=25{,}3$ см. С помощью микрокалькулятора вычислите бо́льшую сторону параллелограмма.
2) В треугольнике ABC $AC=b$, $\angle A=\alpha$, $\angle B=\beta$, точка D лежит на стороне AC, $\angle BDC=\gamma$. Найдите BD.

66.4. 1) В параллелограмме $ABCD$ $\angle A=50°$, $\angle CAD=15°$, $AC=17{,}8$ см. С помощью микрокалькулятора вычислите бо́льшую сторону параллелограмма.
2) В треугольнике ABC $\angle A=\alpha$, $\angle B=\beta$, точка E лежит на стороне BC, $\angle AEB=\gamma$, $AE=m$. Найдите AC.

66.5. 1) В треугольнике ABC $AC=15{,}2$ см, $\angle A=25°$, $\angle C=80°$. С помощью микрокалькулятора вычислите площадь треугольника.
2) В треугольнике ABC $AB=BC$, BD — высота. Через середину высоты проведена прямая, пересекающая стороны AB и BC в точках E и F соответственно. Найдите EF, если $BD=h$, $\angle ABC=\beta$, $\angle BEF=\alpha$.

66.6. 1) В треугольнике EPM $EP=31{,}7$ см, $\angle P=75°$, $\angle M=65°$. С помощью микрокалькулятора вычислите площадь треугольника.
2) В треугольнике ABC $AB=BC$. Через середину высоты BD треугольника проведена прямая, пересекающая стороны AB и BC в точках K и L соответственно, $KL=m$. Найдите высоту BD, если $\angle ABC=\beta$ и $\angle BLK=\alpha$.

66.7*. В треугольнике ABC BM — медиана, $\angle ABM=\alpha$, $\angle MBC=\beta$. Найдите AB, если $BM=m$.

66.8*. В треугольнике ABC BD — медиана, $\angle ABD=\alpha$, $\angle DBC=\beta$, $BC=a$. Найдите BD.

§ 67. ТЕОРЕМА КОСИНУСОВ

67.1. 1) В треугольнике две стороны равны 27,4 и 16,3, угол между ними 140°. С помощью микрокалькулятора вычислите третью сторону треугольника.

2) Стороны треугольника равны 16,86; 15 и 20. Найдите угол, лежащий против меньшей стороны, используя микрокалькулятор.

67.2. 1) Две стороны треугольника равны 1,3 и 42,5, угол между ними 100°. С помощью микрокалькулятора вычислите третью сторону треугольника.

2) Стороны треугольника равны 8; 12,47; 16. Найдите угол, лежащий против средней по длине стороны, используя микрокалькулятор.

67.3. 1) Стороны параллелограмма равны 11,3 и 9,7. Угол между ними равен 40°. С помощью микрокалькулятора вычислите бóльшую диагональ параллелограмма.

2) Стороны треугольника равны 7, 8 и 4,61 см. Используя микрокалькулятор, найдите высоту, опущенную на бóльшую сторону треугольника.

67.4. 1) Диагонали параллелограмма равны 16,8 и 12,4, угол между ними 55°. С помощью микрокалькулятора вычислите бóльшую сторону параллелограмма.

2) Стороны треугольника равны 21, 24 и 25,92 см. Найдите, используя микрокалькулятор, высоту, опущенную на среднюю по длине сторону.

67.5. 1) Стороны треугольника равны 4 и 5, а угол между ними 140°. С помощью микрокалькулятора найдите высоту h, опущенную на третью сторону треугольника.

2) Стороны треугольника равны 6, 7 и 7,5 см. Используя микрокалькулятор, найдите радиус описанной около треугольника окружности.

67.6. 1) Стороны треугольника равны 8 и 5, а угол между ними равен 40°. С помощью микрокалькулятора найдите высоту, опущенную на третью сторону треугольника.

2) Стороны треугольника равны 3, 5 и 6,26 см. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника, используя микрокалькулятор.

67.7*. Докажите, что в любом треугольнике углы A, B и C связаны соотношением

$$\cos^2 A=\cos^2 C+\sin^2 B-2\sin A\sin B\cos C.$$

67.8*. Докажите, что в любом треугольнике углы A, B и C связаны соотношением

$$2\sin A\sin B\cos C-1=\cos^2 C-\cos^2 A-\cos^2 B.$$

§ 68. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ В КООРДИНАТАХ

68.1. 1) В равнобедренном треугольнике ABC угол B прямой, $AC=2\sqrt{2}$, BD — медиана треугольника. Вычислите скалярные произведения векторов $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BD}$.
2) Даны точки $A(1;\ 3)$, $B(4;\ 7)$, $C(-1;\ -1)$, $D(7;\ 5)$. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$. С помощью микрокалькулятора вычислите угол между этими векторами.

68.2. 1) В равностороннем треугольнике MHP HK — биссектриса, $MH=2$. Вычислите скалярные произведения векторов $\overrightarrow{HK}\cdot\overrightarrow{MP}$, $\overrightarrow{HK}\cdot\overrightarrow{HP}$, $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{MP}$.
2) Даны точки $M(2;\ 3)$, $P(-2;\ 0)$, $O(0;\ 0)$, $K(-5;\ -12)$. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{MP}$ и $\overrightarrow{OK}$. С помощью микрокалькулятора вычислите угол между этими векторами.

68.3. 1) В прямоугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O, $AB=2$, $\angle CAD=30°$. Вычислите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}$.
2) Даны точки $A(2;\ 4)$, $B(5;\ 8)$, $C(-7;\ -1)$, $D(-12;\ -13)$. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$. С помощью микрокалькулятора вычислите угол между этими векторами.

68.4. 1) В прямоугольнике $MHPK$ диагонали пересекаются в точке O, $PK=2$, $\angle MOK=120°$. Вычислите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{MH}\cdot\overrightarrow{PH}$, $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PK}$.
2) Даны точки $P(2;\ 3)$, $H(8;\ -5)$, $K(3;\ 1)$, $M(-5;\ 7)$. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{PH}$ и $\overrightarrow{KM}$. С помощью микрокалькулятора вычислите угол между этими векторами.

68.5. 1) В трапеции $ABCD$ $\angle A=10°$, $\angle D=80°$, $AD=8$, $BC=7$. Вычислите скалярное произведение $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$.
2) Даны точки $A(x;\ -5)$, $B(x;\ x)$, $O(0;\ 0)$. Найдите x и угол между векторами $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$, если известно, что их скалярное произведение равно -6.

68.6. 1) В трапеции $PHKM$ $\angle P=13°$, $\angle H=77°$, $MK=3$, $PH=5$. Вычислите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{HP}\cdot\overrightarrow{MK}$, $\overrightarrow{HK}\cdot\overrightarrow{MP}$.
2) Даны точки $M(y;\ -1)$, $O(0;\ 0)$, $H(2;\ -1)$, $P(3;\ 5)$. Известно, что скалярное произведение векторов $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{HP}$ равно $-y^2$. Найдите y и угол между этими векторами.

68.7*. 1) В треугольнике ABC $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}<0$. Где расположен центр окружности, описанной около треугольника?

2) Даны точки $B(-2; 10)$, $C(6; 4)$, $D(1; 1)$ и точка A, лежащая на оси Oy. Найдите координаты точки A, если известно, что прямая AC перпендикулярна прямой BD.

68.8*. 1) В треугольнике ABC $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}>0$. Где расположен центр окружности, описанной около треугольника?

2) Дан четырехугольник $EKPH$. Вершина E принадлежит оси абсцисс, а вершины $P(1; 2)$, $H(-6; 6)$, $K(4; 6)$ расположены так, что диагонали четырехугольника взаимно перпендикулярны. Найдите координаты точки E.

§ 69. СВОЙСТВА СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ. ПРИМЕНЕНИЕ СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

69.1. 1) Известно, что $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$, $|\vec{a}|=5$ см, $|\vec{b}|=3$ см. Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен $60°$. Найдите $|\vec{c}|$.

2) Используя скалярное произведение векторов, докажите, что медиана равнобедренного треугольника, проведенная к его основанию, является биссектрисой этого треугольника.

69.2. 1) Известно, что $\vec{m}=\vec{n}-\vec{k}$, $|\vec{n}|=\sqrt{2}$ см, $|\vec{k}|=3$ см, угол между векторами $\vec{n}$ и $\vec{k}$ равен $45°$. Найдите $|\vec{m}|$.

2) Используя скалярное произведение векторов, докажите, что медиана равнобедренного треугольника, проведенная к ее основанию, является высотой этого треугольника.

69.3. 1) Найдите угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $(\vec{a}-\vec{b})^2+(2\vec{a}-\vec{b})^2=56$, $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$.

2) Используя скалярное произведение векторов, докажите, что если биссектриса треугольника является его высотой, то этот треугольник равнобедренный.

69.4. 1) Найдите угол между векторами $\vec{m}$ и $\vec{n}$, если $(\vec{m}-2\vec{n})^2+(\vec{m}+\vec{n})^2=73$, $|\vec{m}|=2\sqrt{2}$, $|\vec{n}|=3$.

2) Используя скалярное произведение векторов, докажите, что если биссектриса треугольника является его медианой, то этот треугольник равнобедренный.

69.5. 1) Известно, что $\vec{a}=3\vec{p}-\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{p}+3\vec{k}$, где $\vec{p}$ и $\vec{k}$ — единичные взаимно перпендикулярные векторы. Вектор $\vec{c}$ имеет длину $\sqrt{5}$ и составляет равные углы с векторами $\vec{p}$ и $\vec{k}$. Запишите разложение вектора $\vec{c}$ по векторам $\vec{p}$ и $\vec{k}$.

2) В $\triangle ABC$ $5AB^2=BC^2+AC^2$. Докажите, что медианы треугольника AA_1 и BB_1 взаимно перпендикулярны.

69.6. 1) Известно, что $\vec{p}=3\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{k}=\vec{a}-3\vec{b}$, где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — единичные взаимно перпендикулярные векторы. Вектор $\vec{m}$ имеет длину $\sqrt{20}$ и составляет равные углы с векторами $\vec{p}$ и $\vec{k}$. Запишите разложение вектора $\vec{m}$ по векторам $\vec{p}$ и $\vec{k}$.

2) В треугольнике ABC $\angle B=90°$, $\cos C=\frac{\sqrt{6}}{3}$. Докажите, что угол между медианами BB_1 и AA_1 прямой.

69.7*. 1) В треугольнике ABC $AC=3$ см, $BC=6$ см, $\angle ACB=120°$. Точка E делит сторону AB в отношении $1:2$, считая от вершины A. Найдите отрезок CE.

2) Даны точки $M(-1; 3)$, $P(1; 2)$, $K(-2; 5)$. Найдите площадь треугольника PKM.

69.8*. 1) В треугольнике PKH $PH=2\sqrt{2}$ дм, $PK=2$ дм, $\angle HPK=135°$. Найдите отрезок PO, если точка O принадлежит прямой HK и $HO : OK=1 : 3$.

2) Даны точки $A(3; 2)$, $B(4; 5)$, $C(7; 10)$. Найдите площадь треугольника ABC.

ДЛИНА ОКРУЖНОСТИ И ПЛОЩАДЬ КРУГА

§ 70. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРАВИЛЬНОГО МНОГОУГОЛЬНИКА. ФОРМУЛА УГЛОВ ПРАВИЛЬНОГО МНОГОУГОЛЬНИКА

70.1. 1) Найдите углы правильного десятиугольника.

2) Диагональ правильного пятиугольника равна 4. Найдите сторону пятиугольника, используя микрокалькулятор.

70.2. 1) Найдите углы правильного двенадцатиугольника.

2) Сторона правильного пятиугольника равна 2. Найдите его диагональ, используя микрокалькулятор.

70.3. 1) Найдите внешние углы правильного девятиугольника.

2) Сторона правильного пятиугольника $ABCDE$ равна 2. Найдите расстояние от точки C до прямой AE, используя микрокалькулятор.

70.4. 1) Найдите внешние углы правильного десятиугольника.

2) В правильном пятиугольнике $ABCDE$ расстояние от точки D до прямой AB равно 4. Найдите сторону пятиугольника, используя микрокалькулятор.

70.5. 1) Существует ли правильный многоугольник, у которого каждый угол равен 145°?

2) Сторона правильного пятиугольника $ABCDE$ равна 2. Диагонали AD и BE пересекаются в точке O. Найдите AO, используя микрокалькулятор.

70.6. 1) Существует ли правильный многоугольник, каждый угол которого равен 149°?

2) В правильном пятиугольнике $ABCDE$ диагонали AC и BE пересекаются в точке O. Длина BO равна 2. Найдите сторону пятиугольника, используя микрокалькулятор.

70.7*. Какими равными правильными многоугольниками можно покрыть плоскость без просветов?

70.8*. Можно ли комбинациями двух видов правильных многоугольников покрыть плоскость без просветов? Приведите пример.

§ 71. ПОСТРОЕНИЕ ПРАВИЛЬНЫХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ. ВЫРАЖЕНИЕ ДЛЯ РАДИУСА ВПИСАННОЙ И ОПИСАННОЙ ОКРУЖНОСТИ

71.1. 1) С помощью циркуля и линейки впишите в данную окружность правильный треугольник.

2) Сторона правильного треугольника, описанного около некоторой окружности, равна $\sqrt{3}$. Найдите сторону правильного четырехугольника, вписанного в ту же окружность.

71.2. 1) С помощью циркуля и линейки впишите в данную окружность правильный четырехугольник.

2) Сторона правильного четырехугольника, описанного около некоторой окружности, равна 4. Найдите сторону правильного треугольника, вписанного в ту же окружность.

71.3. 1) С помощью циркуля и линейки опишите около данной окружности правильный треугольник.

2) Сторона описанного правильного четырехугольника на $\sqrt{3}$ больше стороны правильного треугольника, вписанного в ту же окружность. Найдите сторону четырехугольника.

71.4. 1) С помощью циркуля и линейки опишите около данной окружности правильный четырехугольник.

2) Сторона описанного правильного треугольника на $\sqrt{6}$ больше стороны правильного четырехугольника, вписанного в ту же окружность. Найдите сторону треугольника.

71.5. 1) Постройте правильный шестиугольник по отрезку, равному расстоянию от центра шестиугольника до его стороны.

2) Один из двух правильных n-угольников вписан в окружность, другой описан около нее. Может ли отношение периметров этих многоугольников равняться 0,51?

71.6. 1) Постройте правильный шестиугольник по отрезку, равному его меньшей диагонали.

2) Один из правильных n-угольников описан около окружности, а другой вписан в нее. Может ли отношение площадей этих многоугольников быть больше 4?

71.7*. 1) В окружность радиуса R вписаны правильные $2n$-угольник и n-угольник, a_n — сторона n-угольника. Найдите площадь $2n$-угольника.

2) Внутри правильного шестиугольника со стороной $2\sqrt{3}$ см выбрана точка M. Найдите сумму расстояний от точки M до прямых, содержащих стороны шестиугольника.

71.8*. 1) Около окружности описаны правильные $2n$-угольник и n-угольник. Вокруг n-угольника описана еще одна окружность. Отношение радиусов этих двух окружностей равно x ($x>1$). Найдите отношение периметров n-угольника и $2n$-угольника.

2) Около правильного шестиугольника со стороной, равной 1, описана окружность. Найдите сумму квадратов

расстояний от произвольной точки окружности до всех вершин шестиугольника.

§ 72. ДЛИНА ОКРУЖНОСТИ, ДЛИНА ДУГИ

72.1. 1) Найдите радиус окружности, если ее длина равна 88π м.
2) С помощью микрокалькулятора вычислите длину дуги, радиус которой равен 22, а градусная мера 165°.

72.2. 1) Длина окружности равна 96π см. Найдите ее радиус.
2) Дуга в 117° имеет радиус 29 см. Найдите длину этой дуги, используя микрокалькулятор.

72.3. 1) С помощью микрокалькулятора вычислите градусную меру дуги, длина и радиус которой равны соответственно 94,2 см и 45 см.
2) В окружности длиной 36π см проведена хорда, стягивающая дугу в 60°. Найдите длину этой хорды.

72.4. 1) Длина дуги равна 62,8 м, а ее радиус 36 м. Найдите градусную меру дуги, используя микрокалькулятор.
2) В окружности длиной 24π см проведена хорда, равная 12 см. Найдите градусную меру меньшей дуги, стягиваемой хордой.

72.5. 1) Каким должен быть радиус окружности, чтобы ее длина была равна сумме длин двух окружностей с радиусами 11 и 47 см?
2) В окружности длиной 48π см проведена хорда, равная 9,6 см. Найдите длину меньшей из дуг, стягиваемых этой хордой, используя микрокалькулятор.

72.6. 1) Каким должен быть радиус окружности, чтобы ее длина была равна разности длин двух окружностей с радиусами 37 и 15 см?
2) В окружности длиной 40π см проведена хорда, отстоящая от центра на 2,1 см. Найдите длину меньшей из дуг, стягиваемых этой хордой, используя микрокалькулятор.

72.7*. Даны две окружности. Вторая окружность имеет центр O на первой окружности и касается ее диаметра AB в точке M. Найдите длину второй окружности, если $AM=m$, $BM=n$.

72.8*. Две окружности касаются внутренним образом в точке A. Через точку A проведена прямая, пересекающая малую и большую окружности в точках B и C соответственно. Найдите отношение длин данных окружностей, если $AB:AC=x$.

§ 73. ПЛОЩАДЬ КРУГА И КРУГОВОГО СЕКТОРА

73.1. 1) С помощью микрокалькулятора вычислите площадь круга, длина окружности которого равна 17,1 см.
2) Градусная мера дуги окружности радиуса 8 мм равна 36°. Найдите площадь кругового сектора, соответствующего этой дуге.

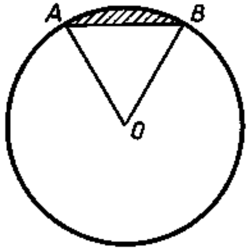

Рис. 197

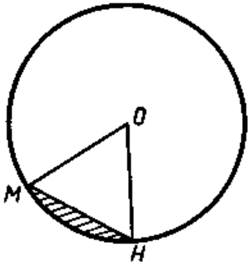

Рис. 198

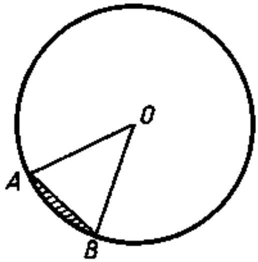

Рис. 199

73.2. 1) Длина окружности равна 19,1 м. С помощью микрокалькулятора вычислите площадь соответствующего круга. 2) Найдите площадь кругового сектора радиуса 6 м, если градусная мера его дуги равна 150°.

73.3. 1) С помощью микрокалькулятора вычислите длину окружности круга, площадь которого равна 724 см^2.
2) На рисунке 197 изображена окружность с центром O, $AB=BO=10$ см. Найдите площадь защтрихованной фигуры.

73.4. 1) Площадь некоторого круга равна 51,6 см^2. Найдите длину окружности, соответствующей этому кругу, используя микрокалькулятор.
2) На рисунке 198 изображена окружность с центром O и радиусом 8 м. Меньшая из дуг, стягиваемая хордой MH, имеет градусную меру 60°. Найдите площадь заштрихованной фигуры.

73.5. 1) Как изменится длина окружности, если площадь соответствующего ей круга уменьшится в 441 раз?
2) На рисунке 199 изображена окружность с центром O и радиусом 24 м. Хорда AB равна 9,6 м. Найдите площадь заштрихованной фигуры, используя микрокалькулятор.

73.6. 1) Как изменится площадь круга, если длина соответствующей ему окружности увеличится в 19 раз?
2) На рисунке 200 изображена окружность с центром O и радиусом 7 см. Расстояние от точки O до хорды MP равно 3 см.

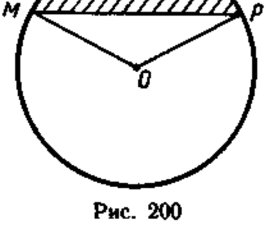

Рис. 200

Рис. 201

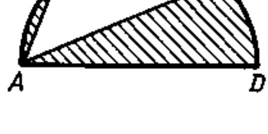

Рис. 202

С помощью микрокалькулятора вычислите площадь заштрихованной фигуры.

73.7*. Площадь полукруга (рис. 201) равна Q. Градусные меры дуг AB и CD равны 30°. Найдите площадь заштрихованной фигуры.

73.8*. На рисунке 202 изображен полукруг с диаметром AD. Градусные меры дуг AB и CD равны 45°. Найдите площадь полукруга, если площадь заштрихованной фигуры равна Q.

ДВИЖЕНИЯ

§ 74. ОСЕВАЯ И ЦЕНТРАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ. ПОНЯТИЕ ДВИЖЕНИЯ

74.1. 1) Дана трапеция $ABCD$. Постройте фигуру, на которую отображается данная трапеция при центральной симметрии с центром A.

2) Докажите, что при движении вертикальные углы отображаются на вертикальные углы.

74.2. 1) Дана трапеция $ABCD$. Постройте фигуру, на которую отображается данная трапеция при осевой симметрии с осью AB.

2) Докажите, что при движении смежные углы отображаются на смежные углы.

74.3. 1) Дана трапеция $ABCD$, все стороны которой имеют разные длины, O — середина диагонали AC. Постройте фигуру, на которую отображается данная трапеция при центральной симметрии с центром O.

2) Докажите, что при движении подобные ромбы отображаются на подобные ромбы.

74.4. 1) Дана трапеция $ABCD$, все стороны которой имеют разные длины. Постройте фигуру, на которую отображается данная трапеция при осевой симметрии с осью AC.

2) Докажите, что при движении подобные прямоугольники отображаются на подобные прямоугольники.

74.5. 1) Даны окружность и точка A на ней. Постройте фигуру, на которую отображается данная окружность при центральной симметрии с центром A.

2) При некотором движении отрезок AB отображается на отрезок EP, $AB = 12$ см. Точка M принадлежит отрезку AB, $AM = 2$ см. Точка M отображается на точку H. Найдите HE.

74.6. 1) Даны окружность и прямая a, касательная к этой окружности. Постройте фигуру, на которую отображается данная окружность при осевой симметрии с осью a.

2) Точка K принадлежит отрезку MH и делит его в отношении $3:2$, считая от точки M. При некотором движении отрезок MH отображается на отрезок EP, а точка K — на точку T. Найдите отношение $ET:EP$.

75.1. 1) Дан квадрат $ABCD$. Постройте фигуру, которая получается из этого квадрата параллельным переносом на вектор $\overrightarrow{AC}$.

2) Докажите, что правильный шестиугольник при повороте вокруг своего центра на угол 60° отображается на себя.

75.2. 1) Постройте квадрат, который получается из данного квадрата $ABCD$ поворотом вокруг центра A на угол 135° против часовой стрелки.

2) Докажите, что при параллельном переносе прямой AB на вектор $\overrightarrow{AB}$ прямая AB отображается на себя.

75.3. 1) Дана трапеция $ABCD$. Известно, что при параллельном переносе прямая AD отображается на прямую BC, а прямая BD отображается на себя. Постройте точку, в которую переходит точка A при этом параллельном переносе.

2) В правильном треугольнике с центром O угол POH равен 60° (рис. 203). Докажите, что при повороте вокруг центра O на угол 120° против часовой стрелки отрезок KP отображается на отрезок MH.

75.4. 1) Дан равнобедренный треугольник ABC с прямым углом B. При некотором повороте точка A отображается на точку B, а точка B — на точку C. Постройте центр поворота.

2) Даны две окружности одинакового радиуса с центрами O и O_1 (рис. 204). Хорды AB и CD равны и лежат на одной прямой. Докажите, что при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{OO_1}$ отрезок AB отображается на отрезок CD.

75.5. 1) Даны угол ABC и точка M внутри его. Найдите на сторонах угла такие точки D и E, чтобы при параллельном переносе точка B отображалась на точку D, а точка E — на точку M.

2) При некотором повороте точка A отображается на точку B, а точка C — на точку D. При каком значении угла поворота точки A, B, C, D лежат на одной прямой?

75.6. 1) Даны две прямые и точка O. На каждой из прямых отметьте точку, которая бы переходила в другую при повороте на угол 70° относительно центра O.

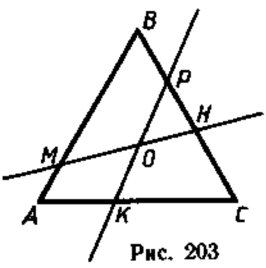

Рис. 203

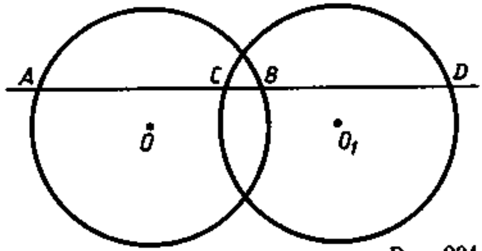

Рис. 204

2) Некоторая фигура перешла в себя при параллельном переносе. Докажите, что не существует круга, внутри которого лежала бы данная фигура.

§ 76. ПРИМЕНЕНИЕ ДВИЖЕНИЙ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

76.1. 1) Отрезки AC и BD пересекаются в точке O. $AO=OC$, $BO=OD$. Точки M и H — середины отрезков AB и CD. Используя центральную симметрию, докажите, что точка O — середина отрезка MH.

2) Используя параллельный перенос, докажите, что если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна третьей прямой, то и другая прямая перпендикулярна этой прямой.

76.2. 1) Используя осевую симметрию, докажите, что медианы, проведенные к боковым сторонам равнобедренного треугольника, равны.

2) Используя поворот, докажите, что если градусные меры двух дуг окажутся равны, то и стягивающие их хорды тоже равны.

76.3. 1) Через точку пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, пересекающая стороны BC и AD в точках M и H соответственно. Докажите, что $BM=DH$.

2) Постройте окружность, касающуюся двух данных параллельных прямых и проходящую через данную между ними точку.

76.4. 1) Докажите, что если трапеция вписана в окружность, то она равнобедренная.

2) Даны две параллельные прямые b и c и точка A между ними. Постройте равнобедренный треугольник ABC с прямым углом A так, чтобы вершины B и C лежали соответственно на прямых b и c.

76.5. 1) Через центр квадрата $ABCD$ проведены две взаимно перпендикулярные прямые, каждая из которых пересекает противоположные стороны квадрата. Докажите, что отрезки этих прямых, заключенные внутри квадрата, равны между собой.

2) Прямая c пересекает две параллельные прямые a и b под острым углом. Постройте равнобедренный треугольник ABC так, чтобы точки A и B лежали на прямых a и b соответственно, а медиана CM была равна основанию AB треугольника и лежала на прямой c.

76.6. 1) Даны две окружности равных радиусов с центрами O_1 и O_2. Прямая, параллельная O_1O_2, пересекает первую окружность в точках A и B, вторую — в точках C и D так, что точки B и D принадлежат отрезку AC. Докажите, что $O_1O_2=BD$.

2) Даны угол mn и точка O внутри его. Постройте квадрат $ABCD$ так, чтобы диагонали квадрата пересекались в точке O, а точки B и D лежали на лучах m и n соответственно.

ИТОГОВОЕ ПОВТОРЕНИЕ КУРСА ПЛАНИМЕТРИИ

§ 77. ТРЕУГОЛЬНИКИ

77.1. 1) В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle C = \angle A_1C_1B_1 = \angle C_1HB_1 = 90°$, $AB = A_1C_1 = 5$, $AC = 4$, $C_1H = 3$ (рис. 205).
а) Докажите, что треугольники ABC и A_1C_1H равны, а треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны.
б) Найдите площадь треугольника ABC.
в) Найдите отрезки HB_1 и B_1C_1.
2) Начертите произвольный треугольник. Постройте одну из биссектрис этого треугольника.

77.2. 1) В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = 2\sqrt{3}$, $AC = BC = 2$, $\angle A = \angle A_1 = \angle B_1$, CP — биссектриса треугольника ABC, $\angle C_1MB_1 = \angle C_1HM = 90°$, $CP = C_1H$ (рис. 206).
а) Докажите, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны, а треугольники CPB и MC_1H равны.
б) Найдите площадь треугольника ABC.
в) Найдите углы треугольника C_1MH.
2) Начертите произвольный треугольник. Постройте одну из медиан этого треугольника.

77.3. 1) В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1 = 45°$, $\angle C = \angle C_1 = 105°$, $A_1C_1 = 2$, $AC = 4$, MH — средняя линия треугольника ABC (рис. 207).
а) Докажите, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны, а треугольники $A_1B_1C_1$ и MBH равны.
б) Сравните отрезки BH и A_1B_1.
в) Найдите отрезок BC.
г) Вычислите с помощью микрокалькулятора площадь треугольника ABC.
2) Начертите произвольный треугольник. Постройте одну из высот этого треугольника.

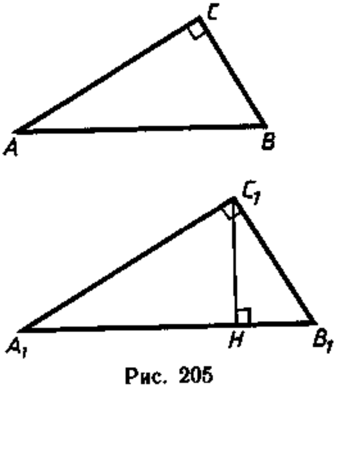

Рис. 205

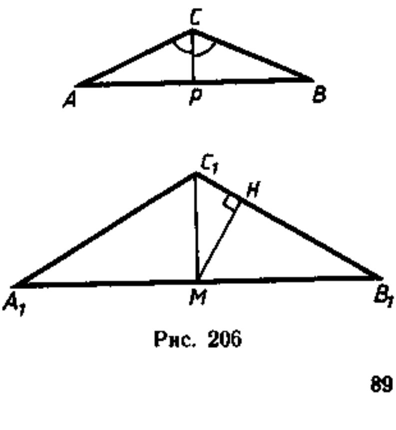

Рис. 206

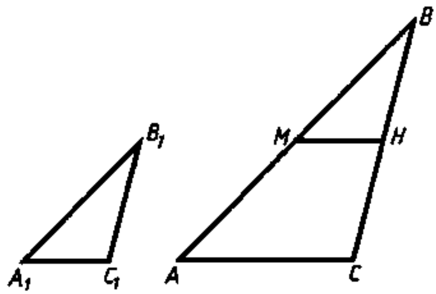

Рис. 207

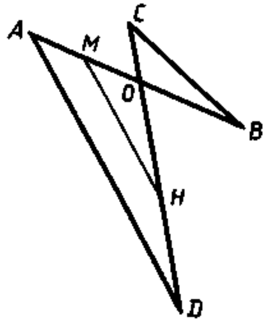

Рис. 208

77.4. 1) На рисунке 208 $OB=OH=HD=3\sqrt{2}$, $OC=OM=$ $=AM=1$, $\angle BOC=135°$.

а) Докажите, что треугольники BOC и MOH равны, а треугольники OCB и OAD подобны.

б) Найдите площадь треугольника AOD.

в) Найдите отрезок MH.

г) Вычислите с помощью микрокалькулятора угол CBO.

2) Начертите произвольный треугольник. Постройте одну из средних линий этого треугольника.

77.5. 1) Отрезки AB и CD пересекаются в точке O так, что $BO=OC=a$, $AO=OD=b$.

а) Докажите, что углы ABD и ACD равны.

б) Найдите отношение площадей треугольников ABD и CBD.

в) Докажите, что точка O — середина отрезка MH, если OM и OH — биссектрисы треугольников AOC и BOD соответственно.

г) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник AOD, и радиус окружности, описанной около треугольника BOC, если угол AOC равен α.

2) Начертите произвольный треугольник ABC. Постройте треугольник, подобный треугольнику ABC, так, чтобы его периметр составлял $\frac{3}{4}$ периметра треугольника ABC.

77.6. 1) Отрезки KP и MH имеют равные длины и пересекаются в точке O так, что прямые KH и MP параллельны, $OH=a$, $OM=b$.

а) Докажите, что $OK=a$, $OP=b$.

б) Найдите отношение периметров треугольников OKM и OHP.

в) Докажите, что точка O принадлежит отрезку AB, если точки A и B принадлежат отрезкам KH и MP соответственно, причем $AH:KH=MB:MP$.

г) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник

KOH, и радиус окружности, описанной около треугольника MOP, если угол KHO равен α.

2) Начертите произвольный треугольник MPH. Постройте треугольник, подобный треугольнику MPH, так, чтобы его площадь составляла $\frac{4}{9}$ площади треугольника MPH.

§ 78. ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ

78.1. Через середину диагонали AC прямоугольника $ABCD$ проведена прямая, пересекающая стороны BC и AD в точках P и K соответственно.

а) Докажите, что четырехугольник $APCK$ — параллелограмм.

б) Найдите площадь четырехугольника $APCK$, если $AC=13$ см, $KD=8$ см, $AK=4$ см.

78.2. Через середину диагонали BD квадрата $ABCD$ проведена прямая, пересекающая стороны AB и CD в точках P и K соответственно.

а) Докажите, что четырехугольник $BKDP$ — параллелограмм.

б) Найдите площадь четырехугольника $BKDP$, если $AP=2$ см, $KD=6$ см.

78.3. Через середину диагонали BD параллелограмма $ABCD$ перпендикулярно ей проведена прямая, пересекающая стороны BC и AD в точках M и T соответственно.

а) Докажите, что четырехугольник $BMDT$ — ромб.

б) Найдите радиус круга, вписанного в четырехугольник $BMDT$, если $BD=8$ см, $TM=6$ см.

78.4. Через середину диагонали AC трапеции $ABCD$ перпендикулярно этой диагонали проведена прямая, пересекающая основания AD и BC в точках M и T соответственно.

а) Докажите, что четырехугольник $ATCM$ — ромб.

б) Найдите радиус окружности, вписанной в четырехугольник $ATCM$, если $AT=10$ см, $AC=16$ см.

78.5. Через точку пересечения диагоналей квадрата $ABCD$ проведены две взаимно перпендикулярные прямые, пересекающие стороны AB, BC, CD и AD в точках P, K, H, T соответственно.

а) Докажите, что четырехугольник $PKHT$ является квадратом.

б) Найдите площадь четырехугольника $PKHT$, если $BC=a$, $\angle TKC=\alpha$.

78.6. Дан ромб $ABCD$ с острым углом A, равным α. Через точку O пересечения диагоналей этого ромба проведены две прямые, пересекающие стороны AB, BC, CD и AD в точках M, H, K, P соответственно. $\angle POK=\alpha$, $\angle APO=90°$.

а) Докажите, что четырехугольник $MHKP$ является прямоугольником.

б) Найдите площадь четырехугольника $MHKP$, если $KP=a$.

§ 79. ОКРУЖНОСТЬ

79.1. 1) Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность так, что градусные меры дуг AB и BC равны соответственно 100° и 120°. Найдите угол ACB.

2) В треугольник ABC вписана окружность, касающаяся стороны BC в точке K. С помощью микрокалькулятора найдите углы ACB и ABC, если $CK=8$ см, $KB=6$ см, а радиус окружности равен 2 см.

79.2. 1) Окружность описана около треугольника ABC. Угол BAC равен 50°, угол ACB равен 60°. Найдите меньшую из дуг AC.

2) Треугольник ABC описан около окружности радиусом 12 см. С помощью микрокалькулятора найдите сторону AB, если $\angle CAB=52°$, $\angle CBA=76°$.

79.3. 1) Треугольник с углами 30°, 60°, 90° описан около окружности. Найдите градусные меры дуг, на которые окружность разделилась точками касания.

2) Около остроугольного треугольника ABC описана окружность радиусом 12 см. С помощью микрокалькулятора вычислите угол BAC, если $AC=16$ см, $AB=22$ см.

79.4. 1) Окружность вписана в треугольник. Точки касания делят окружность на дуги с градусными мерами 135°, 135° и 90°. Найдите углы треугольника.

2) Тупоугольный треугольник ABC вписан в окружность радиусом 16 см. С помощью микрокалькулятора вычислите угол BAC, если расстояния от центра окружности до сторон AB и AC равны соответственно 3 и 5 см.

79.5. 1) Треугольник с углами 50°, 60°, 70° описан около окружности. Найдите отношение длин дуг, на которые окружность разделилась точками касания.

2) Около треугольника ABC описана окружность радиусом 15 см, $\angle B=25°$. С помощью микрокалькулятора вычислите углы BAC и BCA, если $BC=20$ см.

79.6. 1) Круг вписан в треугольник. Радиусы, проведенные в точки касания, разделили площадь круга на части, которые относятся как 13:12:11. Найдите углы треугольника.

2) Треугольник ABC вписан в окружность радиусом 12 см. С помощью микрокалькулятора вычислите углы A и B треугольника, если $\angle C=16°$, $AC=15$ см.

§ 80. МЕТОД КООРДИНАТ. ВЕКТОРЫ

80.1. Даны точки $A(-3; 3)$, $B(6; 6)$, $C(3; -3)$. Отрезок BD является биссектрисой треугольника ABC.

1) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

2) Выразите вектор $\overrightarrow{BD}$ через векторы $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$.

3) Запишите уравнение окружности с диаметром AC.

4) С помощью микрокалькулятора вычислите угол между медианой AE и основанием AC.

80.2. Диагонали квадрата $ABCD$ пересекаются в точке O, окружность, вписанная в квадрат, касается прямой AB в точке E. Координаты точек O, A и B соответственно равны $(7;\ 5)$, $(2;\ 8)$, $(10;\ 10)$.

1) Найдите координаты точки E.

2) Запишите уравнение окружности, описанной около квадрата.

3) Выразите вектор $\overrightarrow{OE}$ через векторы $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OD}$.

4) С помощью микрокалькулятора найдите угол ECA.

80.3. Координаты вершин треугольника ABC: $A\,(-6;\ 10)$, $B\,(8;\ 8)$, $C\,(2;\ 2)$. Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC.

1) Выясните вид треугольника ABC.

2) Выразите вектор $\overrightarrow{CO}$ через векторы $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$.

3) Запишите уравнение окружности, описанной около треугольника ABC.

4) С помощью микрокалькулятора вычислите угол OCA.

80.4. В четырехугольнике $ABCD$ заданы координаты трех вершин: $A\,(-2;\ 2)$, $B\,(0;\ 6)$, $C\,(4;\ 4)$. Противоположные стороны четырехугольника попарно параллельны, а диагонали пересекаются в точке O.

1) Выясните вид четырехугольника.

2) Выразите вектор $\overrightarrow{OC}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.

3) Запишите уравнение окружности, вписанной в четырехугольник.

4) Вычислите угол, который составляет прямая, проходящая через середину стороны AB и точку C с прямой BC.

80.5. Треугольник ABC задан координатами вершин $A\,(-4;\ 0)$, $B\,(4;\ 0)$, $C\,(0;\ 2)$. Точка O — центр окружности, описанной около этого треугольника.

1) Найдите длину медианы AK треугольника ABC.

2) Запишите уравнение окружности, описанной около треугольника ABC.

3) Выразите вектор $\overrightarrow{OC}$ через векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$.

4) С помощью микрокалькулятора вычислите угол между прямыми AO и BC.

80.6. Треугольник ABC задан координатами своих вершин $A\,(0;\ 12)$, $B\,(9;\ 0)$, $C\,(0;\ -12)$. Точка O — центр окружности, вписанной в треугольник.

1) Найдите длину медианы CM треугольника.

2) Запишите уравнение окружности, вписанной в треугольник.

3) Выразите вектор $\overrightarrow{OB}$ через векторы $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OA}$.

4) С помощью микрокалькулятора вычислите угол между прямыми OC и OA.

ВВЕДЕНИЕ В СТЕРЕОМЕТРИЮ

§ 81. АКСИОМЫ СТЕРЕОМЕТРИИ И СЛЕДСТВИЯ ИЗ НИХ

81.1. 1) Пользуясь изображением на рисунке 209, назовите:
а) точку пересечения прямой AD с плоскостью DD_1C;
б) линию пересечения плоскостей ADD_1 и D_1CD.
В какой из плоскостей ADD_1, A_1B_1B, BB_1C_1, BCD не лежит точка A?
2) Три прямые, проходящие через точку D, пересекают четвертую прямую соответственно в точках A, B, C. Докажите, что точки A, B, C, D лежат в одной плоскости.

81.2. 1) Пользуясь изображением на рисунке 210, назовите:
а) точку пересечения прямой BD с плоскостью ABC;
б) линию пересечения плоскостей ABD и CDB.
В какой из плоскостей ABD, BDC, ABC, ADC не лежит точка C?
2) Прямые AB и AC пересекаются с некоторой прямой в точках M и H соответственно. Докажите, что точки M, H, C, B лежат в одной плоскости.

81.3. 1) Пользуясь изображением на рисунке 211, назовите:
а) точку пересечения прямой MC с плоскостью B_1BC_1;
б) линию пересечения плоскостей MC_1C и BCB_1.
В каких из плоскостей ADD_1, ABB_1, ABD, MD_1C_1 лежит прямая MD_1?
2) Даны прямая и точка, не лежащая на этой прямой. Докажите, что все прямые, проходящие через данную точку и пересекающие данную прямую, лежат в одной плоскости.

81.4. 1) По изображению на рисунке 212 назовите:
а) точку пересечения прямой MD и плоскости ABC;
б) линию пересечения плоскостей MBC и EBC.
В каких из плоскостей ABD, EDC, MBE, ABC не лежит прямая MB?
2) Даны две прямые, пересекающиеся в точке A. Докажите, что все прямые, пересекающие данные прямые и не проходящие через точку A, лежат в одной плоскости.

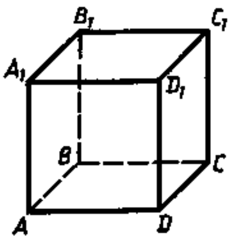

Рис. 209

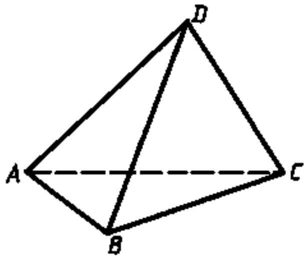

Рис. 210

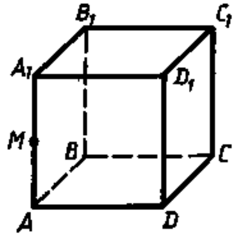

Рис. 211

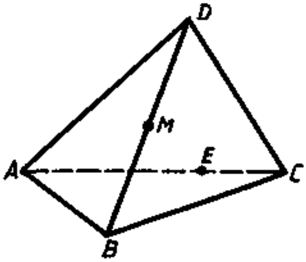

Рис. 212

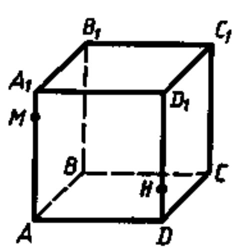

Рис. 213

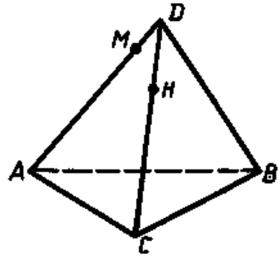

Рис. 214

81.5. 1) Перечертите рисунок 213 в тетрадь и постройте:
а) точку пересечения прямой MH с плоскостью ABC;
б) линию пересечения плоскостей MHC и ADC.
2) На трех прямых, лежащих в плоскости α, взяты соответственно три точки A, B, C, принадлежащие плоскости β. Докажите, что точка C лежит на прямой AB.

81.6. 1) Перечертите рисунок 214 в тетрадь и постройте:
а) точку пересечения прямой MH с плоскостью ABC;
б) линию пересечения плоскостей MHB и ABC.
2) Плоскости α и β пересекаются по прямой b. Прямая a лежит в плоскости α и пересекает плоскость β в точке M. Докажите, что точка M лежит на прямой b.

81.7*. Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Принадлежит ли точка C плоскости, в которой лежат точки A, B и O?

81.8*. Точка O — центр окружности, описанной около четырехугольника $ABCD$. Точки A, O и C принадлежат плоскости α. Принадлежит ли этой плоскости вершина D?

ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ

§ 82. ТЕОРЕМА О ДВУХ ПРЯМЫХ, ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ТРЕТЬЕЙ. ПРИЗНАК СКРЕЩИВАЮЩИХСЯ ПРЯМЫХ

82.1. 1) На рисунке 215 точки M, H, K, P — середины соответственно отрезков AD и DC, BC, AB. Найдите периметр четырехугольника $MHKP$, если $MP=8$ см, $AC=32$ см.
2) Точка M не лежит в плоскости треугольника ABC. Каково взаимное расположение прямых MA и BC? Ответ обоснуйте.

82.2. 1) На рисунке 216 точка A — середина отрезка MP, $BC \parallel PH$, $AD \parallel PH$, $AB \parallel CD$. Найдите PH, если $AB=4$ дм, а периметр четырехугольника $ABCD$ равен 28 дм.
2) Точка M не принадлежит плоскости четырехугольника $ABCD$. Каково взаимное расположение прямых MD и BC? Ответ обоснуйте.

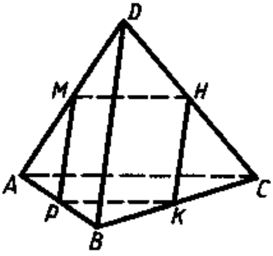

Рис. 215

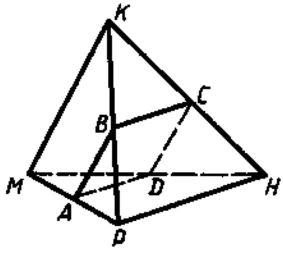

Рис. 216

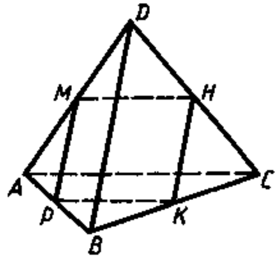

Рис. 217

82.3. 1) На рисунке 217 точки M, H и P — середины соответственно отрезков AD, DC, AB, $PK \parallel MH$. Найдите периметр четырехугольника $MHPK$, если $AC=8$ см, $BD=10$ см.

2) Точка M не лежит в плоскости треугольника ABC, K — середина отрезка MB. Каково взаимное расположение прямых MA и CK? Ответ обоснуйте.

82.4. 1) На рисунке 218 точка A — середина отрезка PK, $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$, $BC \parallel PM$, $CD \parallel HK$. Найдите PM и HK, если $CD=16$ дм, $BC=8$ дм.

2) Точка M не лежит в плоскости четырехугольника $ABCD$, K — середина отрезка MA. Каково взаимное расположение прямых DK и MB? Ответ обоснуйте.

82.5. 1) Прямая b лежит в плоскости α и параллельна прямой a, не лежащей в этой плоскости. Через точку M плоскости α ($M \notin b$) проведена прямая c, параллельная прямой a. Докажите, что прямая c лежит в плоскости α.

2) На рисунке 219 прямая MB пересекает плоскость ABC. Каково взаимное расположение прямых OK и PH? Ответ обоснуйте.

82.6. 1) Прямая a, параллельная прямой b, пересекает плоскость α. Прямая c параллельна прямой b. Может ли прямая c лежать в плоскости α?

2) На рисунке 220 прямая HA пересекает плоскость ABC. Каково взаимное расположение прямых OH и PK? Ответ обоснуйте.

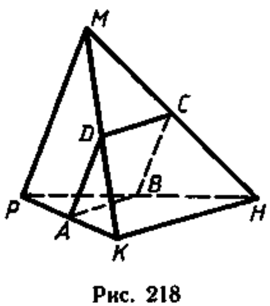

Рис. 218

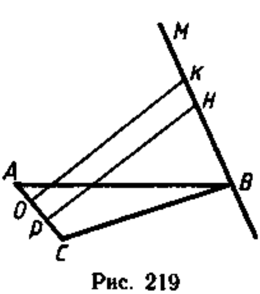

Рис. 219

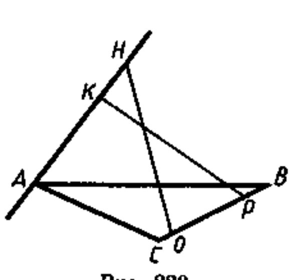

Рис. 220

82.7*. Даны четыре точки A, B, C, D, не лежащие в одной плоскости. Докажите, что прямые, соединяющие середины отрезков AB и CD, AC и BD, AD и BC, пересекаются в одной точке.

82.8*. Даны четыре точки A, B, C и D, которые не лежат в одной плоскости. Докажите, что любые две из трех прямых, соединяющих середины отрезков AB и CD, AC и BD, AD и BC, лежат в одной плоскости.

§ 83. ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

83.1. 1) На рисунке 221 плоскость, параллельная стороне AB треугольника ABC, пересекает его стороны в точках M и K. Найдите AB, если M — середина стороны AC и $MK=10$.
2) Некоторая плоскость α пересекает боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ в точках M и K соответственно. Докажите, что $AD \parallel \alpha$, если M и K — середины боковых сторон трапеции.

83.2. 1) На рисунке 222 плоскость, параллельная основаниям трапеции, пересекает стороны AB и CD в точках M и K соответственно, $AD=10$, $BC=6$. Найдите MK, если M — середина отрезка AB.
2) Плоскость α пересекает стороны BA и BC треугольника ABC в точках H и K соответственно. Докажите, что $AC \parallel \alpha$, если H и K — середины сторон AB и BC.

83.3. 1) Треугольники ABC и DBC не лежат в одной плоскости и имеют общую сторону, точки M, H и K — середины соответственно сторон BD, CD, AC. Отрезок AB пересекает плоскость MKH в точке P. Найдите PK, если $BC=8$.
2) Каким может быть взаимное расположение прямых a и b, если прямая a лежит в плоскости α, а прямая b параллельна этой плоскости?

83.4. 1) Треугольник APD и трапеция $ABCD$ имеют общую сторону AD и лежат в разных плоскостях. Через основание BC трапеции и середину отрезка PD — точку K проведена плоскость, которая пересекает прямую AP в точке M. Найдите MK, если $AD=10$.

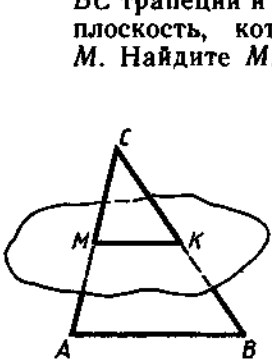

Рис. 221

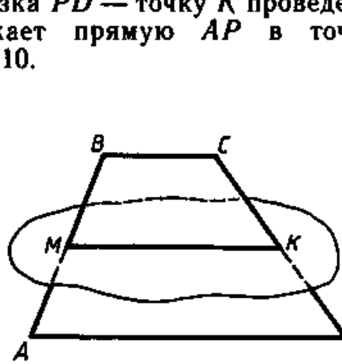

Рис. 222

2) Каким может быть взаимное расположение двух прямых, если обе они параллельны одной плоскости?

83.5. 1) Треугольники ABC и DBC не лежат в одной плоскости и имеют общую сторону. Точки M, H и K — середины соответственно отрезков BD, CD, AC. Плоскость MKH пересекает отрезок AB в точке P. Докажите, что отрезки PH и MK пересекаются и в точке пересечения делятся пополам.

2) Изобразите параллелограмм $ABCD$ и точку P, не лежащую в плоскости этого параллелограмма. Отметьте точки E, K, M, H — середины сторон AB, BC, CD и AD соответственно. Постройте линию пересечения плоскостей PEH и PKM.

83.6. 1) Треугольник APD и трапеция $ABCD$ имеют общую сторону AD и лежат в разных плоскостях. Через основание BC трапеции и середину отрезка PD — точку K проведена плоскость, которая пересекает прямую AP в точке M, $AD=2BC$. Докажите, что отрезки MC и BK пересекаются и в точке пересечения делятся пополам.

2) Изобразите трапецию $ABCD$ и точку K, не лежащую в плоскости ABC. Отметьте точки E и P — середины диагоналей AC и BD соответственно. Постройте линию пересечения плоскостей EPK и ADK.

§ 84. ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПЛОСКОСТЕЙ

84.1. 1) Дано: $\angle DAB=\angle DMP$, $\angle DMK=\angle DAC$ (рис. 223). Докажите, что плоскости MPK и ABC параллельны.
2) Сторона AC треугольника ABC лежит в плоскости α. Через середину BA — точку M проведена плоскость β, параллельная плоскости α и пересекающая BC в точке K. Найдите MK, если $AC=10$ см.

84.2. 1) Дано: $\angle DAB+\angle AEP=180°$, $\angle DAC+\angle AET=180°$ (рис. 224). Докажите, что плоскости ABC и EPT параллельны.

2) Сторона AB треугольника ABC лежит в плоскости β. Через середину отрезка AC — точку P проведена плос-

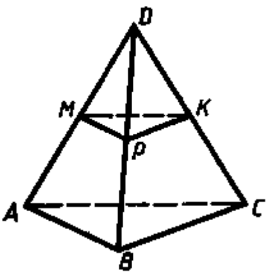

Рис. 223

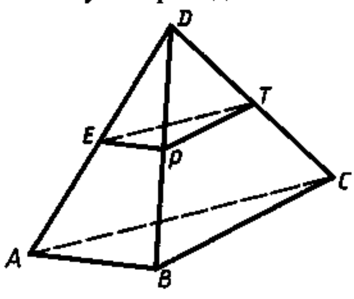

Рис. 224

кость α, параллельная плоскости β и пересекающая BC в точке E. Найдите AB, если $PE=7$ см.

84.3. 1) Прямые AA_1, BB_1 и CC_1 попарно параллельны и не лежат в одной плоскости, $AB \parallel A_1B_1$, $BC \parallel B_1C_1$. Докажите, что $AC \parallel A_1C_1$.

2) Параллельные плоскости α и β пересекают стороны угла ABC в точках A_1, C_1, A_2, C_2 соответственно. Найдите BC_1, если $A_1B:A_1A_2=1:3$, $BC_2=12$ см.

84.4. 1) Прямые AA_1, BB_1, CC_1 не лежат в одной плоскости и имеют общую точку, $AB \parallel A_1B_1$, $BC \parallel B_1C_1$. Докажите, что $AC \parallel A_1C_1$.

2) Точка K лежит между параллельными плоскостями α и β. Прямые a и b, проходящие через точку K, пересекают плоскость α в точках A_1 и B_1, а плоскость β в точках A_2 и B_2 соответственно. Найдите KB_1, если $A_1K:A_1A_2=1:3$, $B_1B_2=15$ см.

84.5. 1) Через точку K проведены две прямые a и b, пересекающие две параллельные плоскости α и β: первую в точках A_1 и A_2, вторую в точках B_1 и B_2 соответственно. Вычислите KA_1 и KB_2, если $A_1A_2:B_1B_2=3:4$, $A_1B_1=7$ см, $KA_2=12$ см.

2) Верно ли утверждение: если две прямые, лежащие в одной плоскости, параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны?

84.6. 1) На параллельных плоскостях α и β выбрано по паре точек A_1, A_2 и B_1, B_2 соответственно так, что прямые A_1B_1 и A_2B_2 пересекаются в точке S. Вычислите SA_1 и SB_2, если $A_1B_1=6$ см, $SA_2=2{,}5$ см, $SB_2:SA_2=3$.

2) Верно ли утверждение: если две прямые, лежащие в одной плоскости, параллельны другой плоскости, то эти плоскости параллельны?

84.7*. Три параллельные плоскости α, β, γ (плоскость β лежит между α и γ) пересекают одну из двух данных прямых в точках A_1, B_1, C_1, а другую прямую в точках A_2, B_2, C_2 соответственно. Докажите, что $A_1B_1:B_1C_1=A_2B_2:B_2C_2$.

84.8*. Две параллельные плоскости α и β пересекают одну из двух данных прямых в точках A_1, B_1, а другую прямую в точках A_2, B_2 соответственно. Точка C_1 принадлежит отрезку A_1B_1, а точка C_2 — отрезку A_2B_2, причем $A_1C_1:C_1B_1=A_2C_2:C_2B_2$. Докажите, что прямая C_1C_2 параллельна плоскости α.

§ 85. ТЕТРАЭДР И ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД. ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ СЕЧЕНИЙ

85.1. 1) В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ постройте сечение плоскостью, проходящей через вершины C и D_1 и точку K отрезка B_1C_1.

2) В тетраэдре $DABC$ постройте сечение плоскостью, проходящей через середину ребра DC, вершину B и параллельной прямой AC.

85.2. 1) В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ постройте сечение плоскостью, проходящей через середину ребра A_1D_1 и вершины D и C_1.

2) В тетраэдре $DABC$ постройте сечение плоскостью, проходящей через вершину A, точку M ребра DB, параллельной прямой BC.

85.3. 1) В тетраэдре $DABC$ точки E, P, M принадлежат соответственно ребрам AD, DB, BC, причем прямые EP и AB не параллельны. Постройте сечение тетраэдра плоскостью EPM.

2) В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка E принадлежит ребру CD. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через эту точку и параллельной плоскости BC_1D.

85.4. 1) В тетраэдре $DABC$ точки E, K, P принадлежат ребрам AB, DB и DC соответственно, причем $PK \parallel BC$. Постройте сечение тетраэдра плоскостью EKP.

2) В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка H принадлежит ребру CD. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через эту точку и параллельной плоскости сечения ACD_1.

85.5. 1) В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки K, P и M принадлежат соответственно ребрам AA_1, A_1B_1 и BC. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью KPM.

2) В тетраэдре $DABC$ точка E принадлежит ребру AC. Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точку E и параллельной ребрам AD и BC. Определите вид сечения.

85.6. 1) В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки P, H, K принадлежат соответственно ребрам B_1C_1, CC_1 и AB. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью PHK.

2) В тетраэдре $DABC$ точка M принадлежит ребру DB. Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точку M и параллельной ребрам AD и BC. Определите вид сечения.

85.7*. Отметьте точки M, K, P на ребрах A_1B_1, BC и DD_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью MKP.

85.8*. Отметьте точки M, K, P, принадлежащие граням ABB_1A_1, $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью MKP.

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ

§ 86. ПРЯМАЯ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНАЯ ПЛОСКОСТИ. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ ПЛОСКОСТИ

86.1. 1) BH — медиана треугольника ABC. Прямая MA перпендикулярна плоскости треугольника. Найдите угол между прямыми BH и MA.

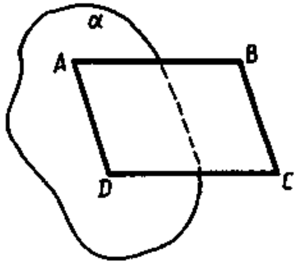

Рис. 225

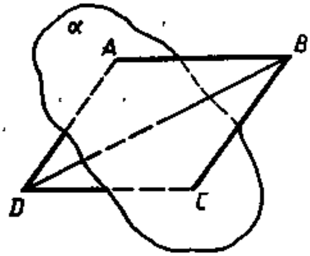

Рис. 226

2) Отрезок AB, равный 5 см, не имеет общих точек с плоскостью α. Прямые AC и BD, перпендикулярные этой плоскости, пересекают ее в точках C и D соответственно. Найдите BD, если $CD=3$ см, $AC=17$ см, $BD<AC$.

86.2. 1) CE — биссектриса треугольника ABC. Прямая BD перпендикулярна плоскости треугольника. Найдите угол между прямыми CE и BD.

2) Отрезок MH не имеет общих точек с плоскостью. Прямые MP и HO, перпендикулярные этой плоскости, пересекают ее в точках P и O соответственно, $MP=12$ дм, $PO=5$ дм, $HO=24$ дм. Найдите MH.

86.3. 1) Сторона AB параллелограмма $ABCD$ перпендикулярна плоскости α (рис. 225). Найдите BD, если $AC=10$ см.

2) Отрезок AB пересекает некоторую плоскость в точке O. Прямые AD и BC, перпендикулярные этой плоскости, пересекают ее в точках D и C соответственно, $AD=6$ см, $BC=2$ см, $OC=1{,}5$ см. Найдите AB.

86.4. 1) Диагональ BD параллелограмма $ABCD$ перпендикулярна плоскости α (рис. 226). Найдите периметр параллелограмма, если $AB=7$ см.

2) Отрезок MH пересекает некоторую плоскость в точке K. Через концы отрезка проведены прямые HP и ME, перпендикулярные плоскости и пересекающие ее в точках P и E. Найдите PE, если $HP=4$ см, $HK=5$ см, $ME=12$ см.

86.5. 1) Прямые AB и CD перпендикулярны некоторой плоскости и пересекают ее в точках B и D соответственно. Найдите AC, если $AB=9$, $CD=15$, $BD=8$.

2) Одна из двух скрещивающихся прямых перпендикулярна плоскости. Будет ли перпендикулярна этой плоскости вторая прямая?

86.6. 1) Через концы отрезка MH проведены прямые, перпендикулярные некоторой плоскости и пересекающие ее в точках K и T соответственно. Найдите MH, если $KT=5$, $MK=4$, $HT=6$.

2) Одна из двух пересекающихся прямых перпендикулярна плоскости. Будет ли перпендикулярна этой плоскости вторая прямая?

86.7*. Дана трапеция $ABCD$, не лежащая в плоскости α. Отрезки AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 являются перпендикулярами, опущенными на эту плоскость, причем $AA_1+CC_1=BB_1+DD_1$. Докажите, что основания трапеции параллельны плоскости α.

86.8*. Четырехугольник $ABCD$ не лежит в плоскости α. Из вершин четырехугольника на плоскость α опущены перпендикуляры AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, причем $BB_1=DD_1$ и $AA_1+CC_1=2BB_1+2DD_1$. Докажите, что плоскость четырехугольника параллельна плоскости α.

§ 87. ПРИЗНАК ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

87.1. В тетраэдре $DABC$ $AD\perp AC$, $AD\perp AB$, $DC\perp CB$.

а) Докажите, что $AD\perp BC$.

б) Докажите, что прямая BC перпендикулярна плоскости ADC.

в) Найдите площадь треугольника BCA, если $BC=4$, $AC=3$.

87.2. Точка E не принадлежит плоскости прямоугольника $ABCD$, $BE\perp AB$, $BE\perp BC$.

а) Докажите, что $BE\perp CD$.

б) Докажите, что прямая CD перпендикулярна плоскости BCE.

в) Найдите площадь треугольника ECD, если $CD=6$, $CE=8$.

87.3. В тетраэдре $ABCD$ $BD\perp BC$, $DC\perp AC$, $\angle ACB=90°$.

а) Докажите, что $AC\perp BD$.

б) Найдите площадь треугольника ABD, если $AD=25$ мм, $AB=24$ мм.

87.4. Точка E не принадлежит плоскости прямоугольника $ABCD$, $BE\perp AB$, $EA\perp AD$.

а) Докажите, что $AD\perp BE$.

б) Найдите площадь треугольника EBD, если $BD=7$ см, $ED=25$ см.

87.5. 1) В тетраэдре $ABCD$ углы DAC и DAB равны, $AB=AC$. Найдите угол между прямыми AD и BC.

2) Через катеты BD и BC прямоугольных треугольников ABD и ABC проведена плоскость α, не содержащая их общий катет. Будет ли $AB\perp\alpha$?

87.6. 1) В тетраэдре $ABCD$ $\angle ADC=\angle BDC$, $\angle ABD=\angle DAB$. Найдите угол между прямыми AB и CD.

2) Через стороны AD и AP прямоугольников $ABCD$ и $APKB$ проведена плоскость α, не содержащая их общую сторону. Будет ли $AB\perp\alpha$?

87.7*. Все грани параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — равные ромбы; углы между ребрами, имеющими общую точку A, равны. Выясните, перпендикулярна ли прямая A_1C прямой B_1D_1.

87.8*. В параллелепипеде $MPKHM_1P_1K_1H_1$ все грани — ромбы; $\angle M_1MH+\angle M_1MP=180°$. Выясните, перпендикулярна ли прямая P_1H прямой MK.

§ 88. ТЕОРЕМА О ТРЕХ ПЕРПЕНДИКУЛЯРАХ. РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПЛОСКОСТИ

88.1. Прямая CD перпендикулярна плоскости остроугольного треугольника ABC. CK — его высота. Докажите, что прямые DK и AB взаимно перпендикулярны. Найдите расстояние от точки A до плоскости DKC, если $DA=\sqrt{2}$ см, а $\angle DAK=45°$.

88.2. Диагонали плоского четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Из точки O проведены перпендикуляр OM к прямой AB и перпендикуляр OK к плоскости четырехугольника. Докажите, что угол между прямыми MK и AB прямой. Найдите расстояние от точки B до плоскости OKM, если $KM=\sqrt{3}$, $\angle MKB=30°$.

88.3. В треугольнике ABC угол C прямой, а угол A равен 30°. Через точку C проведена прямая CM, перпендикулярная плоскости треугольника, $AC=18$ см, $CM=12$ см. Найдите расстояние от точки M до прямой AB и расстояние от точки B до плоскости ACM.

88.4. В основании тетраэдра $MPHK$ лежит треугольник MPH с углом H, равным 90°. Прямая HK перпендикулярна плоскости основания. Найдите расстояние от точки K до прямой MP и расстояние от точки M до плоскости PHK, если $KH=9$ см, $PH=24$ см, $\angle MPH=30°$.

88.5. В треугольнике ABC $AC=BC=10$ см, $\angle B=30°$. Прямая BD перпендикулярна плоскости треугольника, $BD=5$ см. Найдите расстояние от точки D до прямой AC и расстояние от точки B до плоскости ADC.

88.6. В ромбе $ABCD$ угол A равен 60°, сторона ромба равна 4 см. Прямая AE перпендикулярна плоскости ромба. Расстояние от точки E до прямой DC равно 4. Найдите расстояние от точки E до плоскости ромба и от точки A до плоскости EDC.

88.7*. 1) Через вершину A треугольника ABC проведена плоскость α, параллельная прямой BC. Отрезки BB_1 и CC_1 — перпендикуляры, проведенные к плоскости α, $AB_1=13$ см, $AC_1=15$ см, $B_1C_1=14$ см, расстояние от прямой BC до плоскости α равно 5 см. Найдите площадь треугольника ABC.
2) Даны две параллельные плоскости и множество треугольников, таких, что в каждом треугольнике две вершины принадлежат первой из двух данных плоскостей, а третья вершина — второй. Какую фигуру образует множество всех точек пересечения медиан треугольников?

88.8*. 1) Через вершину M треугольника MHP проведена плоскость β, параллельная прямой HP. Отрезки HH_1 и PP_1 являются перпендикулярами к плоскости β, $HM=17$ см, $PM=10$ см, $HP=9$ см. Найдите площадь $\triangle H_1M_1P_1$, если расстояние от прямой HP до плоскости β равно $\sqrt{15}$ см.
2) Даны две параллельные плоскости α и β и множество треугольников, таких, что одна сторона каждого треуголь-

ника лежит в плоскости α, а середина другой — в плоскости β. Какую фигуру образует множество вершин этих треугольников, не принадлежащих плоскости α?

§ 89. УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТЬЮ. ДВУГРАННЫЙ УГОЛ

89.1. Отрезок AM является перпендикуляром к плоскости прямоугольника $ABCD$. Угол между прямой MC и этой плоскостью равен 30°, $AD=\sqrt{2}$, $CD=2$.
а) Найдите AM.
б) Найдите двугранный угол $MCDA$.

89.2. В треугольнике ABC угол B прямой, $BC=2$. Проекцией этого треугольника на некоторую плоскость является треугольник BCD, $AD=\sqrt{2}$, двугранный угол $ABCD$ равен 45°.
а) Найдите AB.
б) Найдите угол между прямой AC и плоскостью BCD.

89.3. В ромбе $ABCD$ $AB=10$ см, $\angle BAD=45°$, BE — перпендикуляр к плоскости ABC. Двугранный угол $EADB$ равен 60°.
а) Найдите расстояние от точки E до плоскости ABC.
б) С помощью микрокалькулятора вычислите угол между прямой AE и плоскостью ромба.

89.4. В параллелограмме $ABCD$ $AB=20$ см, $\angle BAD=45°$, BM — перпендикуляр к плоскости ABC. Угол между прямой MA и плоскостью ABC равен 60°.
а) Найдите расстояние от точки M до плоскости ABC.
б) С помощью микрокалькулятора вычислите двугранный угол $MADB$.

89.5. В равнобедренном треугольнике ABC $AC=CB=a$, $\angle BAC=30°$, отрезок CM — перпендикуляр к плоскости ABC, $CM=a\sqrt{2}$. Найдите тангенс двугранного угла $MABC$ и угол между прямой AM и плоскостью MBC.

89.6. В равнобедренном треугольнике HEP $\angle EHP=\angle HPE=30°$, высота треугольника EM равна $\frac{b\sqrt{3}}{6}$. Прямая KE перпендикулярна плоскости HEP, $HK=b$. Найдите тангенс двугранного угла $KHPE$ и угол между прямой HK и плоскостью KEP.

§ 90. ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПЛОСКОСТЕЙ

90.1. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AD=2$, $A_1B_1=3$, $CC_1=5$.
а) Найдите AC_1.
б) Докажите, что плоскости AA_1C_1 и ABC взаимно перпендикулярны.

90.2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB=5$, $DD_1=2$, $B_1C_1=1$.
а) Найдите B_1D.

б) Докажите, что плоскости $A_1B_1C_1$ и BD_1D взаимно перпендикулярны.

90.3. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ основание $ABCD$ — квадрат, $AD=2$, $AC_1=2\sqrt{6}$.

а) Найдите CC_1.

б) Докажите, что плоскости ACC_1 и BB_1D_1 взаимно перпендикулярны.

90.4. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ боковая грань DD_1C_1C — квадрат, $DC=3$, $BD_1=\sqrt{22}$.

а) Найдите BC.

б) Докажите, что плоскости BCD_1 и DC_1B_1 взаимно перпендикулярны.

90.5. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ основание $ABCD$ — квадрат. Точка K делит отрезок AC в отношении $1:3$, считая от вершины A.

а) Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, содержащей точку K и перпендикулярной плоскостям ABC и AA_1C.

б) Найдите площадь полученного сечения, если $AC_1=4\sqrt{6}$, $BC=4$.

90.6. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ боковая грань DD_1C_1C — квадрат. Точка M делит отрезок D_1C в отношении $1:5$, считая от вершины D_1.

а) Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, содержащей точку M и перпендикулярной плоскостям BCD_1 и DCC_1.

б) Найдите площадь полученного сечения, если $DD_1=6$, $BD_1=\sqrt{88}$.

90.7*. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ диагональ AC_1 равна $2\sqrt{3}$. Точки M, H и P — середины соответственно ребер B_1C_1, D_1C_1 и DD_1.

а) Найдите периметр сечения куба плоскостью MHP.

б) Докажите, что плоскости AA_1C_1 и MHP взаимно перпендикулярны.

90.8*. Точки M, H, P являются соответственно серединами ребер A_1B_1, B_1C_1 и AD куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Периметр сечения куба плоскостью MHP равен $12\sqrt{2}$.

а) Найдите BD_1.

б) Докажите, что плоскости MHP и BDD_1 взаимно перпендикулярны.

§ 91. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ

91.1. В треугольнике ABC $\angle C=90°$, $BC=5$. Прямая BD перпендикулярна плоскости треугольника. Расстояние от точки D до плоскости ABC равно $5\sqrt{3}$.

а) Найдите расстояние от точки D до прямой AC.

б) Найдите двугранный угол $DACB$.

в) Какие из плоскостей ABD, CBD, ADC перпендикулярны плоскости ABC и почему?

91.2. Прямая ME перпендикулярна плоскости прямоугольного треугольника HPE с гипотенузой HE. $EP=5$, расстояние от точки M до прямой PH равно 10.

а) Найдите расстояние от точки M до плоскости EPH.

б) Найдите двугранный угол $MPHE$.

в) Какие из плоскостей HMP, MEP, MEH перпендикулярны плоскости EHP и почему?

91.3. 1) В треугольнике ABC $BC=6$ см, $\angle ACB=120°$. Прямая BM перпендикулярна плоскости ABC, $BM=3$ см. Найдите расстояние от точки M до прямой AC.

2) $ABCD$ — прямоугольник. Плоскость правильного треугольника DMC перпендикулярна плоскости ABC. Найдите двугранный угол $MADB$.

91.4. 1) $ABCD$ — ромб со стороной, равной 8 см, $\angle A=45°$, прямая BE перпендикулярна плоскости ромба. Точка E удалена от прямой AD на расстояние $4\sqrt{6}$ см. Найдите расстояние от точки E до плоскости ABC.

2) Основанием тетраэдра $DABC$ является правильный треугольник ABC со стороной 4 см. Грани DBC и DBA перпендикулярны плоскости основания. Их общее ребро равно 2 см. Найдите величину двугранного угла $DACB$.

91.5. 1) Точка M равноудалена от всех вершин равнобедренного прямоугольного треугольника ABC, $AC=CB=a$. Плоскость MBC составляет с плоскостью ABC угол 60°. Найдите расстояние от точки M до плоскости ABC.

2) Треугольники ABC и MBC правильные, $BC=2\sqrt{3}$ см. Плоскость MBC перпендикулярна плоскости ABC. Найдите расстояние от точки M до прямой AC.

91.6. 1) В ромбе $ABCD$ сторона равна a, $\angle A=60°$. Точка M, расположенная вне плоскости ромба, равноудалена от его сторон. Найдите расстояние от точки M до плоскости ромба, если плоскость AMD составляет с плоскостью ромба угол 45°.

2) Равносторонний треугольник HBC и прямоугольный треугольник ABC лежат во взаимно перпендикулярных плоскостях, $BC=4\sqrt{3}$, $\angle ACB=60°$. Найдите расстояние от точки H до прямой AC.

91.7*. В прямоугольном параллелепипеде основание — квадрат. Через диагональ основания проведена плоскость, составляющая с плоскостью основания угол 45°. Найдите площадь полученного сечения, если измерения параллелепипеда равны 2, 2, 1.

91.8*. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ боковое ребро AA_1 перпендикулярно плоскости основания, $\angle ABD=90°$, $AA_1=AB=1$, $AD=2$. Через диагональ основания BD проведена плоскость под углом 60° к плоскости основания. Найдите площадь полученного сечения.

МНОГОГРАННИКИ

§ 92. ПРАВИЛЬНАЯ ПРИЗМА

92.1. 1) В правильной треугольной призме длины всех ребер равны 2 см. Найдите площадь сечения, проведенного через боковое ребро и середину противолежащей стороны основания.
2) В правильной четырехугольной призме расстояние от вершины верхнего основания до середины диагонали нижнего основания равно 10 см. Высота призмы 6 см. Найдите длины всех ребер призмы.

92.2. 1) В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания равна 4 см, а боковое ребро $\sqrt{5}$ см. Найдите площадь сечения, проведенного через боковое ребро AA_1 и середину стороны CD основания.
2) В правильной треугольной призме боковое ребро равно 3 см, а расстояние от вершины верхнего основания до середины противоположной стороны нижнего основания равно 6 см. Найдите длины остальных ребер призмы.

92.3. 1) В правильной треугольной призме сторона основания равна 4 см. Через сторону основания и середину противолежащего ей бокового ребра проведена плоскость под углом 45° к плоскости основания. Найдите площадь сечения и высоту призмы.
2) В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ E и F — середины ребер AD и DC соответственно. Найдите угол между прямыми B_1D и EF.

92.4. 1) В правильной четырехугольной призме через диагональ основания и середину противолежащего ей бокового ребра проведена плоскость под углом 60° к плоскости основания. Найдите площадь сечения и высоту призмы, если сторона основания равна $2\sqrt{2}$ см.
2) В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ M, N и E — середины ребер AC, AB и BC соответственно. Найдите угол между прямыми A_1E и MN.

92.5. 1) В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна $\frac{8\sqrt{3}}{3}$, а боковое ребро равно $2\sqrt{3}$. Через сторону нижнего основания AC и середину стороны B_1C_1 верхнего основания проведена плоскость. Найдите площадь сечения и угол между плоскостью сечения и плоскостью основания.
2) В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площадь основания равна 16 см². Найдите расстояние между прямыми AA_1 и B_1D.

92.6. 1) В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ через диагональ основания BD и середину ребра C_1D_1 проведена плоскость. Сторона основания равна $8\sqrt{2}$, а боко-

вое ребро равно 4. Найдите площадь сечения и угол между плоскостью сечения и плоскостью основания.
2) В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна $4\sqrt{3}$ см, E и F — середины ребер A_1B_1 и AC соответственно. Найдите расстояние между прямыми AA_1 и EF.

§ 93. ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ ПРИЗМЫ

93.1. В прямом параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB=2$, $AD=3\sqrt{2}$, $\angle BAD=45°$, $B_1D=\sqrt{19}$. Найдите площади боковой и полной поверхностей параллелепипеда.

93.2. В прямом параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AD=2$, $CD=3$, $\angle ADC=120°$, $A_1C=\sqrt{35}$. Найдите площади боковой и полной поверхностей параллелепипеда.

93.3. В основании прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит ромб, сторона которого равна 4 см. Через ребра AD и B_1C_1 проведена плоскость, составляющая угол 60° с плоскостью основания. Найдите площади боковой и полной поверхностей параллелепипеда, если $\angle BAD=45°$.

93.4. В основании прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит параллелограмм, $AB=4$ см, $AD=6$ см, $\angle BAD=60°$. Через ребра AD и B_1C_1 проведена плоскость под углом 45° к плоскости основания. Найдите площади боковой и полной поверхностей параллелепипеда.

93.5. В прямом параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ основанием служит ромб. Сторона ромба равна a, $\angle BAD=60°$. Диагональ параллелепипеда B_1D составляет с плоскостью боковой грани угол 45°. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.

93.6. В прямом параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ основанием служит ромб со стороной a и углом BAD, равным 45°. Прямая A_1D наклонена к плоскости грани AA_1B_1B под углом 30°. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.

§ 94. НАКЛОННАЯ ПРИЗМА

94.1. 1) В наклонной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ основанием служит прямоугольный треугольник ABC ($\angle C=90°$). Плоскость боковой грани AA_1C_1C перпендикулярна плоскости основания. Докажите, что CC_1B_1B — прямоугольник.
2) В наклонной треугольной призме угол между двумя боковыми гранями прямой. Площади этих граней равны 50 и 120 см^2. Длина бокового ребра 10 см. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

94.2. 1) Основанием наклонного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ служит прямоугольник $ABCD$. Плоскости граней AA_1D_1D и BB_1C_1C перпендикулярны плоскости основания. Дока-

жите, что остальные боковые грани — прямоугольники.
2) В наклонной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ угол между гранями AA_1C_1C и CC_1B_1B прямой. Найдите площадь боковой поверхности призмы, если боковое ребро равно 5 см, а площади граней AA_1B_1B и CC_1B_1B равны соответственно 130 и 50 см^2.

94.3. 1) Основанием наклонной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит равнобедренный треугольник ABC, $AB=AC$, $\angle A_1AC=\angle A_1AB<90°$. Докажите, что CC_1B_1B — прямоугольник.
2) В наклонной треугольной призме площади двух боковых граней равны 40 и 80 см^2. Угол между ними равен 120°. Найдите площадь боковой поверхности призмы, если длина бокового ребра равна 10 см.

94.4. 1) Основанием наклонной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит правильный треугольник ABC. Вершина A_1 равноудалена от всех вершин нижнего основания. Докажите, что CC_1B_1B — прямоугольник.
2) В наклонной треугольной призме площади двух боковых граней равны 6 и $3\sqrt{2}$ см^2. Угол между ними равен 135°. Найдите площадь боковой поверхности призмы, если длина бокового ребра равна 3 см.

94.5. 1) В наклонной треугольной призме основанием служит правильный треугольник со стороной a. Одна из вершин верхнего основания одинаково удалена от всех сторон нижнего основания. Боковые ребра призмы составляют с плоскостью основания угол 60°. Найдите площадь боковой поверхности призмы.
2) В наклонной треугольной призме две боковые грани равны. Угол между ними равен α. Их общее ребро удалено от противоположной боковой грани на расстояние, равное m. Длина бокового ребра l. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

94.6. 1) Основанием наклонного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ служит прямоугольник $ABCD$, стороны которого равны a и b. Боковое ребро AA_1 равно c и составляет с плоскостью основания угол 45°, а с прилегающими сторонами основания AB и AD равные острые углы. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда.
2) Основанием наклонной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит равнобедренный треугольник ABC, у которого $AB=AC$ и $BC=a$, $\angle A_1AC=\angle A_1AB<90°$. Угол между равными боковыми гранями равен α. Длина бокового ребра равна l. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

94.7*. Основанием наклонной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит прямоугольный треугольник ABC, у которого $\angle C=90°$ и $BC=a$. Вершина B_1 проектируется на середину стороны BC. Двугранный угол с ребром BB_1 равен φ, боковые ребра составляют с плоскостью основания угол α. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

94.8*. Основанием наклонной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90°$). Вершина B_1 проектируется в точку C. Боковое ребро равно l и составляет с плоскостью основания угол φ. Двугранный угол с ребром BB_1 равен α. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

§ 95. ПРАВИЛЬНАЯ ПИРАМИДА. ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ

95.1. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна 4 см, а высота 6 см.

а) Найдите площадь поверхности пирамиды.

б) С помощью микрокалькулятора вычислите углы наклона боковых ребер и боковых граней к плоскости основания.

95.2. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна 5 см, а высота 7 см.

а) Найдите площадь поверхности пирамиды.

б) С помощью микрокалькулятора вычислите углы наклона боковых ребер и боковых граней к плоскости основания.

95.3. 1) В правильной треугольной пирамиде боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 47°. Используя микрокалькулятор, найдите угол наклона боковых ребер к плоскости основания.

2) В правильной четырехугольной пирамиде боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 60°. Расстояние от центра основания до боковой грани равно 2 см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

95.4. 1) В правильной четырехугольной пирамиде боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом 72°. Используя микрокалькулятор, найдите угол наклона боковых граней к плоскости основания.

2) В правильной треугольной пирамиде боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 45°. Расстояние от центра основания до боковой грани равно $\sqrt{6}$ см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

95.5. 1) В правильной четырехугольной пирамиде боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом 43°. Используя микрокалькулятор, найдите угол между смежными боковыми гранями пирамиды.

2) В правильной треугольной пирамиде плоский угол при вершине равен 60°. Высота пирамиды равна 4 см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

95.6. 1) В правильной треугольной пирамиде боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом 56°. Используя микрокалькулятор, найдите угол между смежными боковыми гранями пирамиды.

2) В правильной четырехугольной пирамиде плоский угол при вершине равен 60°. Высота пирамиды равна 2 см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

§ 96. НЕПРАВИЛЬНАЯ ПИРАМИДА. ПРАВИЛЬНАЯ УСЕЧЕННАЯ ПИРАМИДА

96.1. 1) В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник с углом 30° и противолежащим ему катетом, равным 30 см. Боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом 60°. Найдите высоту пирамиды.
2) В правильной четырехугольной усеченной пирамиде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ стороны оснований равны 10 и 6 см, $\angle ADD_1 = 45°$. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

96.2. 1) В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник с углом 60°. Боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 45°. Высота пирамиды равна 10 см. Найдите катет, лежащий против данного острого угла.
2) В правильной треугольной усеченной пирамиде $ABCA_1B_1C_1$ стороны оснований равны 4 и 6 см, $\angle C_1CA = 60°$. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

96.3. 1) В основании пирамиды лежит треугольник со стороной, равной a, и противолежащим ей углом 135°. Боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 60°. Найдите высоту пирамиды.
2) В правильной треугольной усеченной пирамиде стороны оснований равны 6 и 3 см. Высота пирамиды равна $\frac{\sqrt{13}}{2}$ см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

96.4. 1) В основании пирамиды лежит треугольник с углом 150°. Боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 30°, а высота пирамиды равна 6 см. Найдите сторону, лежащую против данного угла треугольника.
2) В правильной четырехугольной усеченной пирамиде стороны оснований равны 10 и 8 см, а высота равна $\sqrt{3}$ см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

96.5. 1) В основании пирамиды лежит равнобедренная трапеция, у которой боковая сторона равна меньшему основанию и равна a. Угол при большем основании трапеции равен 60°. Боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 45°. Найдите высоту пирамиды.
2) В правильной усеченной треугольной пирамиде стороны оснований равны 8 и 4 см. Через боковое ребро и середину противолежащей стороны верхнего основания проведена плоскость. Площадь сечения равна $6\sqrt{3}$ см². Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

96.6. 1) В основании пирамиды лежит равнобедренная трапеция, у которой меньшее основание равно боковой стороне. Один из углов трапеции равен 120°. Боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 30°. Найдите стороны основания, если высота пирамиды равна h.

2) В правильной четырехугольной усеченной пирамиде площадь диагонального сечения равна $28\sqrt{2}$ см². Стороны оснований равны 10 и 4 см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

§ 97. МНОГОГРАННИКИ

97.1. 1) Боковое ребро и высота правильной четырехугольной пирамиды соответственно равны $\sqrt{34}$ и 4 см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

2) В прямой призме $ABCA_1B_1C_1$ $\angle BAC=30°$, $\angle ACB_1=90°$, $AB=8$ см, $CC_1=5$ см. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

97.2. 1) Боковое ребро и высота правильной треугольной пирамиды соответственно равны $3\sqrt{2}$ и $\sqrt{6}$ см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

2) В прямом параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $\angle CAD=45°$, $\angle ADC_1=90°$, $AC=8$ см, $CC_1=4\sqrt{2}$ см. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда.

97.3. 1) Основанием пирамиды $MABCD$ служит квадрат со стороной 10 см. Ребро MB перпендикулярно плоскости основания. Грани MAD и MCD составляют с плоскостью основания угол 45°. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

2) В прямой призме $ABCA_1B_1C_1$ $AC=BC=10$ см, $\angle ABC=30°$. Расстояние от вершины C_1 до прямой AB равно 13 см. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

97.4. 1) Основанием тетраэдра $DABC$ служит равнобедренный прямоугольный треугольник, $\angle ACB=90°$, $AC=BC=6$ см. Ребро DB перпендикулярно плоскости основания. Грань ADC составляет с плоскостью основания угол 60°. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

2) В прямом параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ основанием служит ромб, $\angle BAD=60°$. Высота параллелепипеда равна 12 см. Расстояние от вершины D_1 до прямой AC равно 13 см. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда.

97.5. 1) В основании пирамиды $DABC$ лежит равнобедренный треугольник ABC, $AC=CB=a$, $\angle ACB=120°$. Грани DAC и DAB перпендикулярны к плоскости основания, а грань DBC составляет с ней угол 45°. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

2) В прямой треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ $\angle ACB=90°$, $AC=BC=a$. Прямая B_1C составляет с плоскостью грани AA_1B_1B угол 30°. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

97.6. 1) В основании пирамиды лежит ромб со стороной, равной a, и углом $60°$. Боковые грани, проходящие через стороны острого угла ромба, перпендикулярны плоскости основания, а остальные две боковые грани наклонены к плоскости основания под углом $60°$. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

2) В прямой треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ $\angle ACB=90°$, $\angle BAC=60°$, $AC=a$. Прямая A_1C составляет с плоскостью грани AA_1B_1B угол $45°$. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

97.7*. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна a. Угол между смежными боковыми гранями равен 2α. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

97.8*. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна m. Угол между смежными боковыми гранями равен 2φ. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

ВЕКТОРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 98. ПОНЯТИЕ ВЕКТОРА В ПРОСТРАНСТВЕ

98.1. 1) Диагонали параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ пересекаются в точке O. Запишите векторы с началами и концами в вершинах параллелепипеда или в точке O, которые:

а) сонаправлены вектору $\overrightarrow{OA}$;

б) противоположно направлены вектору $\overrightarrow{AB}$;

в) равны вектору $\overrightarrow{A_1B}$.

2) P и T — середины ребер AB и BD тетраэдра $ABCD$. Есть ли среди векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ пара коллинеарных (рис. 227)?

98.2. 1) В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки P и K — середины ребер CC_1 и CB. Запишите векторы с началами и концами в вершинах параллелепипеда или в точках P и K, которые:

а) сонаправлены вектору $\overrightarrow{CP}$;

б) противоположно направлены вектору $\overrightarrow{PK}$;

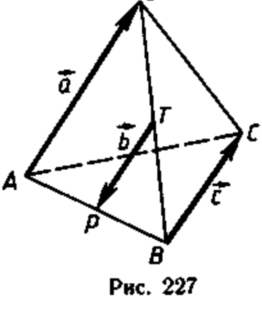

Рис. 227

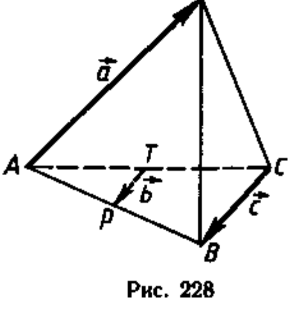

Рис. 228

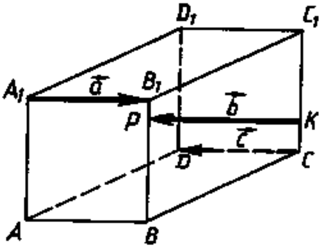

Рис. 229

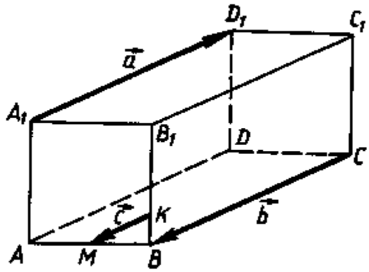

Рис. 230

в) равны вектору $\overrightarrow{AC}$.

2) Точки P и T — середины ребер AB и AC тетраэдра $ABCD$. Есть ли среди векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ пары коллинеарных векторов (рис. 228)?

98.3. 1) В правильной треугольной пирамиде $DABC$ точки P, M, K, T — середины соответственно ребер DA, BC, BA, DC. Запишите векторы с началами и концами в вершинах пирамиды или точках P, M, K и T, которые:

а) сонаправлены вектору $\overrightarrow{AC}$;

б) противоположно направлены вектору $\overrightarrow{PK}$;

в) равны вектору $\overrightarrow{TP}$.

2) Точки P и K лежат на ребрах BB_1 и CC_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Есть ли среди векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ коллинеарные (рис. 229)?

98.4. 1) В правильной треугольной пирамиде $DABC$ точки K, P, M, T — середины соответственно ребер DC, DB, AC, BA. Запишите векторы с началами и концами в вершинах пирамиды или точках K, P, M и T, которые:

а) сонаправлены вектору $\overrightarrow{CB}$;

б) противоположно направлены вектору $\overrightarrow{TM}$;

в) равны вектору $\overrightarrow{PT}$.

2) Точки M и K лежат на ребрах AB и BB_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Есть ли среди векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ коллинеарные (рис. 230)?

98.5. 1) В правильной треугольной пирамиде $DABC$ точки E, M, T, K — середины соответственно ребер DC, DB, BA, AC.

а) Перечислите пары противоположно направленных векторов, не лежащих на одной прямой, с началами и концами в точках E, M, T, K.

б) Перечислите пары равных векторов с концами в точках E, M, T, K.

в) Перечислите векторы, имеющие равные длины, с концами в точках E, M, T, K.

2) Точки K, H, M и T — середины ребер параллелепипеда

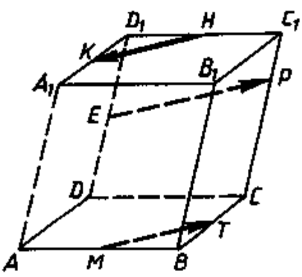

Рис. 231

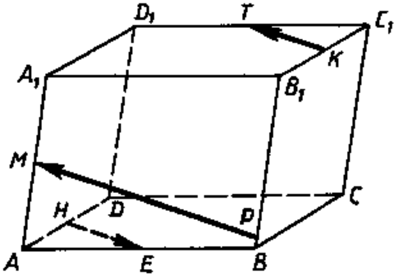

Рис. 232

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 231). Есть ли среди векторов $\overrightarrow{HK}$, $\overrightarrow{EP}$, $\overrightarrow{MT}$ пары коллинеарных?

98.6. 1) В правильной четырехугольной пирамиде $PABCD$ точки K, M, T, E — середины соответственно ребер AB, PA, PC, BC.

а) Перечислите пары сонаправленных векторов с концами в точках K, M, T, E.

б) Перечислите пары равных векторов с концами в точках K, M, T, E.

в) Перечислите векторы, имеющие равные длины, с концами в точках K, M, T, E.

2) Точки T, K, H, E — середины соответствующих ребер параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 232). Есть ли среди векторов $\overrightarrow{KT}$, $\overrightarrow{PM}$, $\overrightarrow{HE}$ пары коллинеарных?

§ 99. СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ ВЕКТОРОВ

99.1. 1) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед. Упростите выражение $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{D_1B}+\overrightarrow{B_1D_1}+\overrightarrow{DC}$.

2) Изобразите тетраэдр $ABCD$ и вектор, равный $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}$.

99.2. 1) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед. Упростите выражение $\overrightarrow{B_1D_1}+\overrightarrow{C_1C}+\overrightarrow{C_1B}+\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{A_1D_1}$.

2) Изобразите тетраэдр $ABCD$ и вектор, равный $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{BA}$.

99.3. 1) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед. Упростите выражение $\overrightarrow{BC_1}+\overrightarrow{D_1C_1}+\overrightarrow{D_1A}-\overrightarrow{C_1B_1}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AB}$.

2) Изобразите тетраэдр $ABCD$ и вектор, равный $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{DC}$.

99.4. 1) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед. Упростите выражение $\overrightarrow{C_1D}-\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{D_1A_1}+\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{CC_1}$.

2) Изобразите тетраэдр $ABCD$ и вектор, равный $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{DA}$.

99.5. 1) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед. Упростите выражение $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{B_1D_1}-\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BC_1}+\overrightarrow{DA_1}-\overrightarrow{BD_1}$.

2) Укажите вектор $\vec{x}$, начало и конец которого являются вершинами тетраэдра $ABCD$, если $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}-\vec{x}-\overrightarrow{CD}$.

99.6. 1) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед. Упростите выражение $\overrightarrow{C_1A_1}-\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{D_1A}+\overrightarrow{B_1C}-\overrightarrow{D_1B}$.

2) Укажите вектор $\vec{x}$, начало и конец которого являются вершинами тетраэдра $ABCD$, если $\overrightarrow{CD}=\vec{x}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{DB}$.

§ 100. УМНОЖЕНИЕ ВЕКТОРА НА ЧИСЛО

100.1. 1) Изобразите на рисунке взаимное расположение точек A, B и C, если: а) $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{AB}=-2\overrightarrow{AC}$; в) $\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

2) Точка K не лежит в плоскости треугольника ABC (рис. 233). Точки E и P — середины отрезков AB и BC. Выразите разность векторов $\overrightarrow{KE}$ и $\overrightarrow{KP}$ через вектор $\overrightarrow{AC}$.

100.2. 1) Изобразите взаимное расположение точек A, B и C, если: а) $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{AB}=-3\overrightarrow{AC}$; в) $\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

2) Точка M не лежит в плоскости треугольника KPT (рис. 234). Точки A и B — середины отрезков KP и TP. Выразите разность векторов $\overrightarrow{MK}$ и $\overrightarrow{MT}$ через вектор $\overrightarrow{AB}$.

100.3. 1) Точка C лежит на отрезке AB и делит его в отношении $2:3$, считая от вершины A. Выразите:

а) вектор $\overrightarrow{AC}$ через вектор $\overrightarrow{AB}$;

б) вектор $\overrightarrow{CB}$ через вектор $\overrightarrow{AB}$;

в) вектор $\overrightarrow{BC}$ через вектор $\overrightarrow{AC}$.

2) Диагонали параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ пересекаются в точке O. При каком значении k справедливо соотношение $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{CO}=k\overrightarrow{C_1A}$?

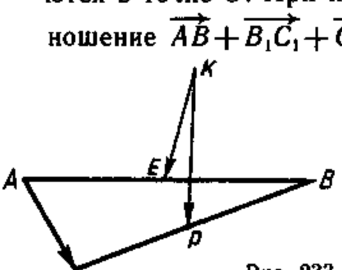

Рис. 233

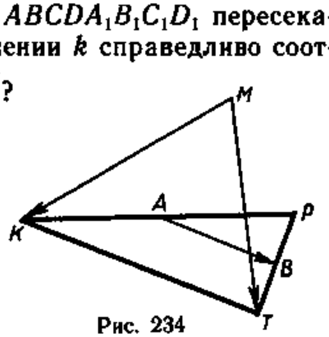

Рис. 234

100.4. 1) Точка A лежит на отрезке BC и делит его в отношении 4:3, считая от вершины B. Выразите:

а) вектор $\overrightarrow{BC}$ через вектор $\overrightarrow{AC}$;

б) вектор $\overrightarrow{AB}$ через вектор $\overrightarrow{CA}$;

в) вектор $\overrightarrow{CA}$ через вектор $\overrightarrow{BC}$.

2) Диагонали параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ пересекаются в точке O. При каком значении k справедливо соотношение $k(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AO})=\overrightarrow{A_1C}$?

100.5. В тетраэдре $DABC$ $\angle DAC=\angle DAB$, основание высоты тетраэдра DM принадлежит ребру BC, $AB=6$, $AC=3$. Выразите:

а) вектор $\overrightarrow{BM}$ через вектор $\overrightarrow{MC}$;

б) вектор $\overrightarrow{BC}$ через вектор $\overrightarrow{CM}$;

в) вектор $\overrightarrow{AM}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

100.6. В тетраэдре $EDHP$ $\angle EPH=\angle EPD$, основание высоты тетраэдра EK принадлежит ребру DH, $DP=8$, $PH=4$. Выразите:

а) вектор $\overrightarrow{DK}$ через вектор $\overrightarrow{KH}$;

б) вектор $\overrightarrow{KH}$ через вектор $\overrightarrow{DH}$;

в) вектор $\overrightarrow{PH}$ через векторы $\overrightarrow{PD}$ и $\overrightarrow{PK}$.

§ 101. КОМПЛАНАРНЫЕ ВЕКТОРЫ. РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРА

101.1. 1) BM — медиана треугольника ABC, O — произвольная точка пространства. Разложите вектор $\overrightarrow{BM}$ по векторам $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$.

2) Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Медианы треугольника BB_1C пересекаются в точке M. Разложите вектор $\overrightarrow{AM}$ по векторам $\overrightarrow{AA_1}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{c}$.

101.2. 1) M — середина стороны AB параллелограмма $ABCD$, O — произвольная точка пространства. Разложите вектор $\overrightarrow{CM}$ по векторам $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$.

2) Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Медианы треугольника $A_1D_1C_1$ пересекаются в точке K. Разложите вектор $\overrightarrow{BK}$ по векторам $\overrightarrow{BA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BB_1}=\vec{b}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{c}$.

101.3. 1) O — точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$, M — произвольная точка пространства. Разложите вектор $\overrightarrow{DO}$ по векторам $\overrightarrow{MA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{MB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{MC}=\vec{c}$.

2) Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Медианы треугольника AD_1C пересекаются в точке M. Разложите вектор $\overrightarrow{BM}$ по векторам $\overrightarrow{BA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BB_1}=\vec{b}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{c}$.

101.4. 1) K — середина медианы AE треугольника ABC, M — произвольная точка пространства. Разложите вектор $\overrightarrow{MK}$ по векторам $\overrightarrow{MA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{MB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{MC}=\vec{c}$.
2) Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Медианы треугольника DBC пересекаются в точке P. Разложите вектор $\overrightarrow{A_1P}$ по векторам $\overrightarrow{AD}=\vec{c}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AA_1}=\vec{a}$.

101.5. 1) В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка M — середина ребра AD, O — точка пересечения отрезков BM и AC. Разложите вектор $\overrightarrow{B_1O}$ по векторам $\overrightarrow{B_1A_1}$, $\overrightarrow{B_1B}$, $\overrightarrow{B_1C_1}$.
2) В тетраэдре $ABCD$ точки M и H — середины ребер AD и BC. Докажите, что прямые AB, HM и DC параллельны одной плоскости.

101.6. 1) В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка E — середина ребра B_1C_1, K — точка пересечения отрезков A_1E и B_1D_1. Разложите вектор BK по векторам $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{BC}$.
2) В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки E и F — середины отрезков BD и C_1C. Докажите, что прямые BC_1, EF и DC параллельны одной плоскости.

101.7*. В наклонной треугольной призме проведена плоскость, пересекающая три боковых ребра и параллельная основаниям. Докажите, что точки пересечения медиан оснований и сечения лежат на одной прямой.

101.8*. В треугольной пирамиде проведены две плоскости, параллельные основанию и пересекающие три боковых ребра. Докажите, что точки пересечения медиан основания и полученных сечений лежат на одной прямой.

§ 102. ИТОГОВОЕ ПОВТОРЕНИЕ

102.1. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ $AB=2$ см, $AA_1=1$ см.
1) Найдите площадь полной поверхности призмы.
2) Найдите площадь сечения призмы плоскостью ACB_1.
3) Найдите угол, который составляет прямая AB_1 с плоскостью ABC.
4) Найдите угол между плоскостями AB_1C и ABC.
5) Найдите длину вектора $\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{B_1B}-\overrightarrow{C_1C}$.
6) Докажите, что прямая A_1C_1 параллельна плоскости ABC_1.

102.2. В правильной четырехугольной пирамиде $EABCD$ $EA=2\sqrt{2}$ см, $AB=2$ см.
1) Найдите площадь полной поверхности пирамиды.
2) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью AEC.
3) Найдите угол, который составляет прямая EC с плоскостью ABC.

4) Найдите угол между плоскостями ECD и ABC.

5) Найдите длину вектора $\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EC}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DE}$.

6) Докажите, что плоскости AEC и ABC взаимно перпендикулярны.

102.3. В прямой призме $ABCA_1B_1C_1$ $\angle ABC=90°$, $\angle CAB=60°$, $AB=2$ см, $AA_1=2\sqrt{3}$ см.

1) Найдите площадь полной поверхности призмы.

2) Найдите площадь сечения призмы плоскостью A_1BC.

3) Найдите угол между плоскостями A_1BC и ABC.

4) Найдите угол между прямой CC_1 и плоскостью A_1BC.

5) Разложите вектор $\overrightarrow{A_1M}$ по векторам $\overrightarrow{A_1A}$, $\overrightarrow{A_1B}$, $\overrightarrow{A_1C}$, если M — точка пересечения медиан треугольника ABC.

6) Найдите угол между плоскостями AA_1B_1 и A_1BC.

102.4. В пирамиде $DABC$ ребро AD перпендикулярно основанию, $AD=4\sqrt{3}$ см, $AB=2$ см, $\angle ABC=90°$, $\angle BAC=60°$, M — середина отрезка DA.

1) Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

2) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью BMC.

3) Найдите угол между плоскостями MBC и ABC.

4) Найдите угол, который составляет прямая BD с плоскостью BMC.

5) Разложите вектор $\overrightarrow{DO}$ по векторам $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$, если O — точка пересечения медиан треугольника ABC.

6) Найдите угол между плоскостями MBC и ABD.

102.5. В прямой призме $ABCA_1B_1C_1$ $AC=13$ см, $AB=14$ см, $BC=15$ см, $AA_1=10$ см. Точки M и H — середины ребер AA_1 и BB_1 соответственно.

1) Найдите площадь полной поверхности призмы.

2) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MHC.

3) Найдите угол между плоскостями MHC и ABC.

4) Найдите угол между прямой AA_1 и плоскостью MHC.

5) Разложите вектор $\overrightarrow{MK}$ по векторам $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AB}$, если K — середина отрезка CH.

6) Постройте линию пересечения плоскостей MHC и ABC.

102.6. В пирамиде $DABC$ $DA=DB=DC=AC=2$ см, $AB=BC$, $\angle ABC=90°$. Точки M и H — середины ребер AD и DC соответственно.

1) Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

2) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью BMH.

3) Найдите угол между плоскостями BMH и ABC.

4) Найдите угол между прямой BD и плоскостью BMH.

5) Разложите вектор $\overrightarrow{MK}$ по векторам $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, если K — середина отрезка BH.

6) Постройте линию пересечения плоскостей MBH и ABC.

МЕТОД КООРДИНАТ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 103. КООРДИНАТЫ ТОЧКИ И КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА

103.1. Точки A (2; 0; 0), B (0; 0; 0), C (0; 2; 0), B_1 (0; 0; 2) являются вершинами куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$.
а) Найдите координаты точек C_1 и D_1.
б) Найдите координаты векторов $\overrightarrow{C_1D}$, $\overrightarrow{A_1C}$, $\overrightarrow{C_1D}-2\overrightarrow{A_1C}$.
в) Запишите разложение вектора $\vec{p}=\overrightarrow{C_1D_1}-2\overrightarrow{A_1C}+\overrightarrow{BD_1}$ по координатным векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$.

103.2. Точки M (2; 0; 0), H (0; 0; 0), P (0; 4; 0), H_1 (0; 0; 4) являются вершинами прямоугольного параллелепипеда $MHPKM_1H_1P_1K_1$.
а) Найдите координаты точек M_1 и K_1.
б) Найдите координаты векторов $\overrightarrow{H_1M_1}$, $\overrightarrow{PM_1}$, $\overrightarrow{H_1M}+2\overrightarrow{PM_1}$.
в) Запишите разложение вектора $\vec{p}=\overrightarrow{H_1M}+2\overrightarrow{PM_1}-\overrightarrow{P_1H}$ по координатным векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

103.3. Точки A (2; 0; 0), B (0; 0; 0), C (0; 2; 0), B_1 (0; 0; 2) являются вершинами призмы $ABCA_1B_1C_1$, K — середина отрезка A_1C_1.
а) Найдите координаты точек C_1 и K.
б) Найдите координаты векторов $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{AC_1}$, $\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AC_1}$.
в) Запишите разложение вектора $\vec{c}=\overrightarrow{BK}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AC_1}$ по координатным векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

103.4. Точки M (0; 0; 0), P (4; 4; 0), H (0; 4; 0), M_1 (0; 0; 6) являются вершинами призмы $MPHM_1P_1H_1$, E — середина отрезка P_1H_1.
а) Найдите координаты точек P_1 и E.
б) Найдите координаты векторов $\overrightarrow{HH_1}$, $\overrightarrow{P_1M}$, $\frac{1}{2}\overrightarrow{HH_1}-\overrightarrow{P_1M}$.
в) Запишите разложение вектора $\vec{a}=\frac{1}{2}\overrightarrow{HH_1}-\overrightarrow{P_1M}+\overrightarrow{PM_1}$ по координатным векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

103.5. Точки A (6; 0; 0), B (0; 6; 0), C (0; 0; 6), D (0; 0; 0) являются вершинами пирамиды $DABC$, DM — высота пирамиды, DK — высота боковой грани ADC.
а) Найдите координаты точек K и M.
б) Разложите вектор $\vec{p}=\overrightarrow{CK}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{DM}$ по координатным векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.
в) Докажите, что прямая, проходящая через точки D и E (101; 101; 101), перпендикулярна плоскости ABC.

103.6. Точки P (2; 2; 0), H (0; 2; 0), K (0; 0; 2), M (0; 0; 0) являются вершинами пирамиды $MPHK$, MO — высота пирамиды, ME — высота боковой грани MPK.
а) Найдите координаты точек E и O.

б) Разложите вектор $\vec{b}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MO}-2\overrightarrow{PH}+\overrightarrow{PK}$ по координатным векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.
в) Докажите, что прямая MT содержит высоту пирамиды, если точка T имеет координаты (0; 0,1; 0,1).

§ 104. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КООРДИНАТ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

104.1. Точки $A(-1;\ 0;\ 1)$, $B(5;\ 0;\ 1)$, $C(2;\ 3\sqrt{3};\ 1)$, $D(2;\ \sqrt{3};\ 3)$ являются вершинами пирамиды $DABC$.
а) Докажите, что пирамида $DABC$ правильная.
б) Найдите координаты основания апофемы пирамиды, лежащей в грани DAC.

104.2. Точки $A(0;\ \sqrt{8};\ \sqrt{8})$, $B(\sqrt{8};\ \sqrt{8};\ 0)$, $C(\sqrt{8};\ 0;\ \sqrt{8})$, $D(\sqrt{8};\ \sqrt{8};\ \sqrt{8})$ являются вершинами тетраэдра $DABC$.
а) Докажите, что данный тетраэдр правильный.
б) Найдите координаты основания биссектрисы DM грани DAC.

104.3. Точки $A(4;\ 0;\ 1)$, $B(4;\ 4;\ 1)$, $C(0;\ 0;\ 5)$, $D(-1;\ 2;\ 0)$ являются вершинами пирамиды $DABC$.
а) Докажите, что все боковые ребра пирамиды составляют равные углы с плоскостью основания.
б) Определите вид треугольника ABC. Найдите координаты основания высоты пирамиды.

104.4. В основании пирамиды с вершиной $E(-1;\ 2;\ -1)$ лежит ромб. Точки $M(0;\ 0;\ 4)$, $H(0;\ 4;\ 4)$, $K(4;\ 4;\ 0)$, $P(4;\ 0;\ 0)$ являются основаниями высот боковых граней.
а) Докажите, что все боковые грани пирамиды составляют равные углы с плоскостью основания.
б) Найдите координаты основания высоты пирамиды.

104.5. В пирамиде $DABC$ ребро AD является ее высотой, $AC=18$, $AB=12$, $AD=5$, $\angle CAB=90°$.
а) Найдите длину медианы DM грани BDC.
б) Найдите расстояние от вершины пирамиды до точки пересечения медиан основания.

104.6. В пирамиде $EABCD$ ребро EA является ее высотой. Четырехугольник $ABCD$ — трапеция, $AD=6$, $AB=14$, $AE=\sqrt{12}$, $\angle CAB=\angle CAD=45°$.
а) Найдите длину медианы EM грани EBC.
б) Найдите расстояние от вершины A до точки пересечения медиан грани EDC.

104.7*. 1) В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит треугольник с прямым углом A. Точки K и E — середины ребер A_1B_1 и AC соответственно, M является точкой пересечения диагоналей грани AA_1B_1B. Точка P делит отрезок C_1C в отношении 2:1, считая от вершины C. Используя метод координат, докажите, что прямые KE и MP скрещиваются.
2) Решите уравнение $\sqrt{(x-1)^2+y^2+z^2}+\sqrt{x^2+(y-1)^2+z^2}=1$.

104.8*. 1) В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки P и M являются серединами ребер AA_1 и B_1C_1 соответственно. Точка E лежит на ребре DC, а точка K — на ребре CC_1, $DE:EC=2:1$, $C_1K:KC=1:2$. Используя метод координат, докажите, что точка K не лежит в плоскости PME.

2) Укажите в пространственной системе координат все решения уравнения $\sqrt{x^2+y^2+(z-1)^2}+\sqrt{(x-1)^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$.

§ 105. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

105.1. 1) Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 2. Вычислите скалярное произведение векторов: а) $\overrightarrow{AB_1}$ и $\overrightarrow{CC_1}$; б) $\overrightarrow{AB_1}$ и $\overrightarrow{CD_1}$.

2) Точки $A(3;\ -1;\ 1)$, $B(1;\ -1;\ 3)$, $C(3;\ 1;\ -1)$ являются вершинами треугольника. Найдите угол ABC.

105.2. 1) В правильной четырехугольной пирамиде $EABCD$ все ребра равны 2, O — точка пересечения диагоналей основания. Вычислите скалярное произведение векторов:

а) $\overrightarrow{BE}$ и $\overrightarrow{CD}$; б) $\overrightarrow{EO}$ и $\overrightarrow{CD}$.

2) Даны вершины треугольника: $A(-1;\ -2;\ 4)$, $B(-4;\ -2;\ 0)$, $C(3;\ -2;\ 1)$. Найдите угол треугольника при вершине A.

105.3. 1) В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ длина ребра равна $\sqrt{2}$. Вычислите скалярное произведение векторов:

а) $\overrightarrow{CD_1}$ и $\overrightarrow{C_1A_1}$; б) $\overrightarrow{DB_1}$ и $\overrightarrow{A_1C_1}$.

2) Точки $A(1;\ 1;\ 5)$, $B(4;\ 7;\ 5)$, $C(8;\ 5;\ 5)$, $D(5;\ -1;\ 5)$ являются вершинами прямоугольника $ABCD$. Найдите больший угол между диагоналями прямоугольника.

105.4. 1) В правильном тетраэдре $DABC$ точки M, N, K, P — середины ребер DC, BC, AB, DB соответственно. Ребро тетраэдра равно 4. Вычислите скалярное произведение векторов:

а) $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{PK}$; б) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$.

2) Точки $A(14;\ -8;\ -1)$, $B(7;\ 3;\ -1)$, $C(-6;\ 4;\ -1)$, $D(1;\ -7;\ -1)$ являются вершинами ромба $ABCD$. Найдите острый угол ромба.

105.5. 1) Дан правильный тетраэдр $DABC$ с ребром, равным $\sqrt{3}$. Точка M является серединой отрезка AC. Вычислите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{MB}$.

2) На оси аппликат найдите точки, из которых отрезок BC виден под острым углом, если $B(-10;\ 7;\ 9)$, $C(2;\ 6;\ -4)$.

105.6. 1) Все ребра правильной пирамиды $EABCD$ равны 2. Вычислите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{DE}$.

2) Даны точки $A(7;\ 3;\ 9)$, $B(-4;\ 5;\ -3)$ и точка C, принадлежащая оси абсцисс. Найдите все возможные значения координат точки C, если известно, что угол ACB не является острым.

105.7*. 1) Пусть S — площадь треугольника ABC. Докажите, что $S=\frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2\cdot\overrightarrow{AC}^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$.

2) Используя скалярное произведение векторов, найдите наибольшее значение выражения

$$\sqrt{\sin^2 x+0{,}5}+\sqrt{\cos^2 x-0{,}5}+\sqrt{0{,}5}.$$

При каком x достигается это значение?

105.8*. 1) Докажите, что площадь параллелограмма $ABCD$ равна $\sqrt{\overrightarrow{AB}^2\cdot\overrightarrow{AD}^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD})^2}$.

2) Используя скалярное произведение векторов, найдите наибольшее значение суммы $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+1$. При каком x это значение суммы достигается?

§ 106. СВОЙСТВА СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

106.1. 1) Вычислите угол между векторами $\vec{a}=3\vec{m}+2\vec{k}$ и $\vec{b}=\vec{m}+5\vec{k}$, где $\vec{m}$ и $\vec{k}$ — единичные взаимно перпендикулярные векторы.

2) $ABCD$ — правильный тетраэдр. Упростите выражение $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$.

106.2. 1) Вычислите угол между векторами $\vec{k}=\sqrt{3}\,\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{m}=2\vec{a}+2\sqrt{3}\,\vec{b}$, где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — единичные взаимно перпендикулярные векторы.

2) В пирамиде $HPMKE$ все ребра равны. Упростите выражение $(\overrightarrow{PH}-\overrightarrow{MK})(\overrightarrow{PH}+\overrightarrow{MK})+\overrightarrow{HK}(\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KE})$.

106.3. 1) Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{c}$ равен углу между векторами $\vec{b}$ и $\vec{a}$ и равен 60°, $\vec{b}\perp\vec{c}$. Вычислите скалярное произведение $(\vec{a}-2\vec{c})\cdot(\vec{b}+\vec{c})$, если $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=x$.

2) В тетраэдре $BACD$ $\angle BDC=\angle BDA=\angle DCA=90°$, $BC=3$, $AC=4$. Найдите сумму $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$.

106.4. 1) Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ попарно перпендикулярны. Вычислите скалярное произведение $(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(3\vec{a}-\vec{c})$, если $|\vec{a}|=y$.

2) В пирамиде $PHKM$ ребро PM является высотой, $\angle PKH=90°$. Найдите сумму $\overrightarrow{MH}\cdot\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{HK}\cdot\overrightarrow{HM}+\overrightarrow{KM}\cdot\overrightarrow{KH}$, если $MK=6$, $KH=8$.

106.5. 1) Даны три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, удовлетворяющие условию $\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}=\vec{0}$, $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$, $|\vec{c}|=5$. Вычислите $\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{c}\cdot\vec{a}$.

2) Докажите, что, каковы бы ни были четыре точки пространства A, B, C, D, имеет место равенство $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=0$.

106.6. 1) Даны три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, удовлетворяющие условию $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$, $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=4$, $|\vec{c}|=5$. Вычислите $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}$.

2) Докажите, что для любого тетраэдра с вершинами в точках A, B, C, D выполняется равенство $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}=0$.

106.7*. 1) Даны три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Докажите, что вектор $(\vec{b}\cdot\vec{c})\cdot\vec{a}-(\vec{a}\cdot\vec{c})\cdot\vec{b}$ перпендикулярен вектору $\vec{c}$.

2) $ABCD$ — тетраэдр. Докажите, что $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{BC}^2-\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{BD}^2)$.

106.8*. 1) Даны три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Известно, что $\vec{a}\perp\vec{c}$. Докажите, что вектор $\vec{b}+\vec{c}-\frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})}{a^2}\vec{a}$ перпендикулярен вектору $\vec{a}$.

2) $ABCD$ — тетраэдр. Докажите, что $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}^2-\overrightarrow{AB}^2)+\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}^2-\overrightarrow{CD}^2)$.

§ 107. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

107.1. 1) Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между прямыми AD_1 и BK, где K — середина DD_1.

2) Докажите, что в правильном тетраэдре скрещивающиеся ребра взаимно перпендикулярны.

107.2. 1) Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между прямыми AC и DC_1.

2) Докажите, что в правильной четырехугольной пирамиде диагональ основания перпендикулярна боковому ребру, не пересекающему ее.

107.3. 1) Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, основанием которого служит квадрат со стороной a. Найдите угол между прямыми C_1D и A_1C, если боковое ребро равно $2a$.

2) Докажите, что в правильной четырехугольной пирамиде $EABCD$ прямая, проходящая через основание высоты пирамиды и точку пересечения медиан грани EAB, перпендикулярна прямой AB.

107.4. 1) В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребра AB, AD, AA_1 соответственно равны a, $2a$, $3a$. Найдите угол между прямыми BD и AB_1.

2) Докажите, что в правильной треугольной пирамиде $DABC$ прямая, проходящая через вершину A и точку пересечения медиан грани DBC, перпендикулярна прямой BC.

107.5. 1) В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ $AA_1=\frac{1}{\sqrt{5}}AB$. Найдите угол между прямыми AB_1 и BC_1.

2) Докажите, что если в треугольной пирамиде проекция вершины пирамиды на противолежащую грань лежит на высоте грани, то два ребра пирамиды взаимно перпендикулярны.

107.6. 1) В прямой призме $ABCA_1B_1C_1$ $AB=BC=1$, $AA_1=\sqrt{6}$, $\angle BAC=30°$. Найдите углы между прямыми AC_1 и A_1B.
2) Докажите, что если в четырехугольной пирамиде проекция одной из вершин основания на диагональное сечение лежит на высоте этого сечения, проведенной к диагонали основания, то одно из боковых ребер пирамиды перпендикулярно этой диагонали.

107.7*. 1) Найдите расстояние от точки $A(10;\ 0;\ 0)$ до прямой, проходящей через точки $B(0;\ 0;\ 0)$, $C(8;\ 6;\ 0)$.

2) Три ребра прямоугольного параллелепипеда «видны» из точки пересечения его диагоналей под углами α, β, γ. Докажите, что $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1$.

107.8*. 1) Точки $A(1;\ 0;\ 0)$, $C(4;\ 3;\ 0)$, $B(0;\ 5;\ 0)$ являются вершинами треугольника. Найдите высоту BH.

2) Из точки пересечения диагоналей прямоугольного параллелепипеда диагонали граней, выходящие из одной вершины, видны под углами α, β, γ. Докажите, что $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=-1$.

§ 108. ДВИЖЕНИЯ

108.1. 1) Найдите координаты точек, в которые переходит точка $A(100;\ 200;\ 1)$ при:

а) центральной симметрии относительно начала координат;

б) зеркальной симметрии относительно плоскости Oxy.

2) Докажите, что при движении треугольник отображается на равный ему треугольник.

108.2. 1) Найдите координаты точек, в которые переходит точка $B(0{,}01;\ 0{,}02;\ -1)$ при:

а) осевой симметрии относительно оси Oz;

б) параллельном переносе на вектор $\vec{p}\{0{,}09;\ 0{,}08;\ 1\}$.

2) Докажите, что при движении угол отображается на равный ему угол.

108.3. 1) а) Докажите, что точки $A(1;\ 2;\ 3)$ и $B(-1;\ -2;\ -3)$ симметричны относительно начала координат.

б) Докажите, что точки $B(3;\ -4;\ 5)$ и $C(3;\ 4;\ 5)$ симметричны относительно плоскости Oxz.

2) Докажите, что при движении двугранный угол отображается на равный ему двугранный угол.

108.4. 1) а) Пусть при параллельном переносе на вектор p точ-

ка A (1; 2; 3) переходит в B (4; 5; 6). Найдите координаты p.
б) Докажите, что точки A (5; 6; 7) и B (−5; 6; −7) симметричны относительно оси Oy.

2) Докажите, что при движении прямая и плоскость, составляющие угол φ, отображаются на прямую и плоскость, составляющие угол φ.

108.5. 1) Прямая a содержит биссектрису угла, образованного координатными осями Ox и Oy. Найдите координаты точки A_1, в которую переходит точка A (10; 20; 0) при осевой симметрии относительно прямой a.

2) Является ли движением отображение пространства на себя, при котором любая точка с координатами (x; y; z) переходит в точку с координатами ($2x$; $2y$; $2z$)?

108.6. 1) Плоскость α содержит ось Ox и биссектрису угла, образованного осями Oz и Oy. Найдите координаты точки, в которую переходит точка B (0; 20; 10) при зеркальной симметрии относительно плоскости α.

2) Является ли движением отображение пространства на себя, при котором любая точка с координатами (x; y; z) переходит в точку ($x-5$; $y+3$; $z-7$)?

§ 109. ПРИМЕНЕНИЕ ДВИЖЕНИЙ ПРОСТРАНСТВА К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

109.1. 1) Докажите, что при движении прямая, перпендикулярная плоскости, отображается на прямую, перпендикулярную плоскости.

2) Исходя из доказанного в задаче 1, докажите, что если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то и другая перпендикулярна этой плоскости.

109.2. 1) Докажите, что при движении плоскость, перпендикулярная прямой, отображается на плоскость, перпендикулярную прямой.

2) Исходя из доказанного в задаче 1, докажите, что если одна из двух параллельных плоскостей перпендикулярна прямой, то и другая плоскость перпендикулярна этой прямой.

109.3. 1) Докажите, что прямáя, содержащая высоту правильной четырехугольной пирамиды, является ее осью симметрии.

2) Исходя из доказанного в задаче 1, докажите, что любое сечение правильной четырехугольной пирамиды, содержащее ее высоту, является равнобедренным треугольником.

109.4. 1) Докажите, что прямая, содержащая точки пересечения диагоналей противоположных граней прямоугольного параллелепипеда, является его осью симметрии.

2) Исходя из доказанного в задаче 1, докажите, что любое сечение прямоугольного параллелепипеда плоскостью, содержащей точки пересечения диагоналей противоположных граней, является прямоугольником.

109.5. 1) Докажите, что прямая, содержащая середины противоположных ребер правильного тетраэдра, является его осью симметрии.

2) Исходя из доказанного в задаче 1, докажите, что каждая плоскость, проведенная через середины противоположных ребер правильного тетраэдра, делит этот тетраэдр на две равные части.

109.6. 1) Докажите, что точка пересечения диагоналей параллелепипеда является его центром симметрии.

2) Исходя из доказанного в задаче 1, докажите, что каждая плоскость, проведенная через точку пересечения диагоналей параллелепипеда, делит его на две равные части.

ЦИЛИНДР. КОНУС. ШАР

§ 110. ЦИЛИНДР

110.1. 1) Радиус основания цилиндра в 3 раза меньше высоты, а площадь полной поверхности равна 288π см^2. Найдите размеры цилиндра.

2) Диагональ сечения цилиндра, параллельного его оси, равна 9 см и наклонена к плоскости основания под углом 60°. Найдите площадь полной поверхности цилиндра, если в основании цилиндра отсекается дуга в 120°.

110.2. 1) Площадь боковой поверхности цилиндра вдвое больше площади основания, а площадь полной поверхности 500π см^2. Найдите размеры цилиндра.

2) Сечение цилиндра плоскостью, параллельной его оси, удалено от нее на $\sqrt{3}$ см. Найдите площадь полной поверхности цилиндра, если площадь сечения равна 8 см^2 и отсекает от окружности основания дугу в 60°.

110.3. 1) Разверткой боковой поверхности цилиндра служит прямоугольник $ABCD$, $AC=4$ см, $\angle CAD=30°$. Найдите площадь полной поверхности цилиндра, если его высота равна CD.

2) Прямая, пересекающая основания цилиндра в точках, лежащих на окружности оснований, наклонена к ним под углом 60° и удалена от оси на 5 см. Найдите высоту цилиндра, если радиус основания равен 13 см.

110.4. 1) Разверткой боковой поверхности цилиндра служит прямоугольник $ABCD$, $AC=8$ см, $\angle CAD=30°$. Найдите площадь полной поверхности цилиндра, если его высота равна AD.

2) Две точки, лежащие на окружностях разных оснований цилиндра, соединены отрезком. Найдите его длину, если радиус основания и высота цилиндра равны 10 и 17 см соответственно, а расстояние от оси цилиндра до отрезка 4 см.

110.5. 1) Плоскости двух сечений цилиндра, проходящих через одну образующую, образуют угол 60°. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, если площади сечений равны 11 и 13 см^2.

2) Плоскость пересекает основания цилиндра по хордам, равным 6 и 8 см, расстояние между которыми 9 см. Найдите площадь поверхности цилиндра, если радиус основания равен 5 см и плоскость пересекает ось цилиндра во внутренней его точке.

110.6. 1) Плоскости двух сечений цилиндра AA_1C_1C и AA_1B_1B проходят через одну образующую AA_1, их площади равны по $10\sqrt{5}$ см^2. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, если площадь сечения CC_1B_1B равна 40 см^2.

2) Вершины квадрата принадлежат окружностям верхнего и нижнего оснований цилиндра. Найдите площадь поверхности, если радиус основания цилиндра равен 7 см, сторона квадрата 10 см и плоскость квадрата пересекает ось цилиндра.

§ 111. КОНУС. УСЕЧЕННЫЙ КОНУС

111.1. 1) Осевое сечение конуса — равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой 12 см. Найдите площадь полной поверхности конуса.

2) Найдите площадь полной поверхности усеченного конуса, если площади его оснований 25π и 64π см^2, а площадь осевого сечения 52 см^2.

111.2. 1) Осевое сечение конуса — равнобедренный треугольник с углом 120° и равными сторонами по 16 см. Найдите площадь полной поверхности конуса.

2) Найдите площадь полной поверхности усеченного конуса, если он образован вращением прямоугольной трапеции с основаниями 13 и 18 см вокруг меньшей стороны, равной 12 см.

111.3. 1) Осевое сечение конуса — прямоугольный треугольник, периметр которого равен $16(2+\sqrt{2})$ см. Найдите площадь полной поверхности этого конуса.

2) Найдите радиусы оснований усеченного конуса, если его боковая поверхность равна 208π см^2, образующая 13 см, а высота 5 см.

111.4. 1) Осевое сечение конуса — треугольник, площадь которого равна $16\sqrt{3}$ см^2, а один из углов 120°. Найдите площадь полной поверхности этого конуса.

2) Образующая усеченного конуса равна 8 см и наклонена к плоскости основания под углом 60°. Диагональ осевого сечения делит этот угол пополам. Найдите площадь полной поверхности усеченного конуса.

111.5. 1) Найдите площадь полной поверхности конуса, если периметр его осевого сечения равен 16 см, а угол развертки боковой поверхности 120°.

2) Определите, в каком отношении делит высоту конуса плоскость, параллельная основанию, если полученные меньший конус и усеченный конус имеют равные площади полных поверхностей, а образующая и радиус основания исходного конуса равны 16 и 10 см соответственно.

111.6. 1) Найдите площадь полной поверхности конуса, если площадь осевого сечения равна 48 см^2, а угол развертки боковой поверхности равен 216°.

2) Определите, в каком отношении делит высоту конуса плоскость, параллельная основанию, если площадь поверхности отсеченного конуса равна половине площади поверхности всего конуса, а радиус основания и образующая исходного конуса равны 2 и 6 см соответственно.

111.7*. 1) AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 — образующие цилиндра. Постройте точку пересечения прямой DD_1 и плоскости, проходящей через данные точки M, K, P, принадлежащие соответственно образующим AA_1, BB_1, CC_1.

2) Конус катится по плоскости вокруг неподвижной вершины. Найдите площадь поверхности, описываемой высотой, если образующая конуса равна L, а высота H.

111.8*. 1) OA, OB, OC, OD — образующие конуса. Постройте точку пересечения прямой OD и плоскости, проходящей через данные точки M, T, K, принадлежащие соответственно образующим OA, OB, OC.

2) Шесть одинаковых конусов уложены на плоскости так, что соприкасаются вершинами и между ними не имеется просветов. Найдите величину угла при вершине осевого сечения конуса.

§ 112. ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ

112.1. Прямоугольный треугольник с катетом 8 см и прилежащим к нему углом 30° вращается вокруг прямой, содержащей гипотенузу. Найдите площадь поверхности полученного тела.

112.2. Равнобедренный треугольник, у которого боковые стороны равны по 4 см, а один из углов 120°, вращается вокруг прямой, содержащей бóльшую сторону. Найдите площадь поверхности полученного тела.

112.3. В равнобедренной трапеции основания равны 14 и 50 см, а диагональ 40 см. Эта трапеция вращается вокруг прямой, содержащей меньшее основание трапеции. Найдите площадь поверхности полученного тела.

112.4. Диагонали ромба равны 6 и 8 см. Этот ромб вращается вокруг прямой, содержащей одну из его сторон. Найдите площадь поверхности полученного тела.

112.5. Треугольник со сторонами 25, 17 и 28 см вращается вокруг прямой, параллельной меньшей стороне и удаленной от нее на 20 см. Найдите площадь поверхности полученного тела, если ось вращения и вершина, противолежащая меньшей стороне, лежат по разные стороны от прямой, содержащей эту сторону.

112.6. Треугольник со сторонами 13, 14 и 15 см вращается вокруг прямой, параллельной меньшей стороне и удаленной от нее на 16 см. Найдите площадь поверхности полученного тела, если вершина, противолежащая меньшей стороне, лежит между осью вращения и прямой, содержащей эту сторону.

§ 113. УРАВНЕНИЕ СФЕРЫ. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ СФЕРЫ И ПЛОСКОСТИ

113.1. 1) Точка $A(0;\ \sqrt{2};\ \sqrt{5})$ лежит на сфере с центром $O(3;\ 0;\ 0)$.
а) Запишите уравнения сферы.
б) Принадлежат ли этой сфере точки с координатами $(5;\ 0;\ 2\sqrt{3})$, $(4;\ -1;\ 0)$?
2) Вершины прямоугольного треугольника с гипотенузой 24 см лежат в сфере. Найдите радиус сферы, если расстояние от центра сферы до плоскости треугольника равно 5 см.

113.2. 1) Центр сферы имеет координаты $(0;\ 0;\ 4)$. Сфера проходит через точку $(2\sqrt{2};\ 0;\ 5)$.
а) Запишите уравнение сферы.
б) Принадлежат ли сфере точки с координатами $(3;\ 1;\ 5)$, $(0;\ \sqrt{5};\ 6)$?
2) Все стороны квадрата, равные по 10 см, касаются сферы. Найдите радиус сферы, если расстояние от центра сферы до плоскости квадрата равно 12 см.

113.3. 1) Даны точки $A(-3;\ 1{,}5;\ -2)$ и $B(3;\ -2{,}5;\ 2)$. Отрезок AB является диаметром сферы.
а) Запишите уравнение сферы.
б) Принадлежат ли сфере точки с координатами $(\sqrt{7};\ -1{,}5;\ 3)$, $(3;\ 2{,}5;\ 1)$?
2) Сторона треугольника, лежащая против угла в 60°, равна $3\sqrt{3}$ см. Вершины треугольника принадлежат сфере. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости треугольника, если радиус сферы равен 5 см.

113.4. 1) Точки $C(1;\ -1{,}5;\ 3)$ и $D(-1;\ 2{,}5;\ -3)$ лежат на сфере. Центр сферы принадлежит отрезку CD.
а) Запишите уравнение сферы.
б) Принадлежат ли сфере точки с координатами $(3;\ -1{,}5;\ \sqrt{7})$, $(1;\ 2{,}5;\ 3)$?
2) Стороны ромба равны $16\sqrt{3}$ см, а угол 60°. Все стороны ромба касаются сферы радиусом 15 см. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости ромба.

113.5. 1) Даны сфера $x^2+y^2+z^2=25$ и плоскость, проходящая через точки $(0;\ 8;\ 0)$, $\left(0;\ 0;\ \frac{8\sqrt{3}}{3}\right)$ параллельно оси Ox.

Пересекает ли эта плоскость сферу? В случае пересечения найдите длину линии пересечения.

2) Вершины треугольника принадлежат сфере, а стороны удалены от центра сферы на 25 см. Найдите площадь треугольника, если его плоскость удалена от центра сферы на 24 см.

113.6. 1) Плоскость α, параллельная оси Oz, пересекает плоскость Oxy по прямой a. Прямая a в плоскости Oxy имеет уравнение $y=6\sqrt{2}-x$. Пересечет ли плоскость α сферу $x^2+y^2+z^2=100$? В случае пересечения найдите длину этой линии.

2) Периметр треугольника равен $72\sqrt{3}$ см, его стороны касаются сферы. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости треугольника, если вершины треугольника удалены от центра сферы на 26 см.

113.7*. 1) Имеют ли общие точки шары, ограниченные сферами $x^2+y^2+z^2=2x+4y-6z+11$, $x^2+y^2+z^2-8y+6z=-21$?

2) Точка O лежит на диагонали AC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и делит ее в отношении $1:3$, считая от точки A. Выясните взаимное расположение сферы с центром в точке O и радиусом 15 см и граней куба, если ребро равно 40 см. В тех случаях, когда они пересекаются, найдите радиус сечения.

113.8*. 1) Имеют ли общие точки шары, ограниченные сферами $x^2+y^2+z^2=2x-6z+6$, $x^2+4x+y^2+z^2=6y+8z-4$?

2) Центр сферы лежит на диагонали AC грани куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 20 см и делит ее в отношении $1:4$, считая от точки A. Выясните взаимное расположение граней куба и сферы, если ее радиус 6 см. В тех случаях, когда они пересекаются, найдите радиус сечения.

§ 114. СФЕРА

114.1. 1) Сечение шара плоскостью, удаленной от его центра на 12 см, имеет площадь 25π см^2. Определите площадь поверхности шара.

2) Плоскость пересекает сферу. Диаметр сферы, проведенный в одну из точек линии пересечения, имеет длину $4\sqrt{2}$ дм и составляет с плоскостью угол 45°. Найдите длину линии пересечения.

114.2. 1) Линия пересечения сферы и плоскости, удаленной от центра сферы на 8 см, имеет длину 12π см. Найдите площадь поверхности сферы.

2) Плоскость пересекает шар. Диаметр, проведенный в одну из точек линии пересечения, составляет с плоскостью угол 45°. Найдите площадь сечения, если диаметр шара равен $4\sqrt{3}$ см.

114.3. 1) Сечения шара двумя параллельными плоскостями, между которыми лежит центр шара, имеют площади 144π и 25π см^2. Найдите площадь поверхности шара, если рас-

стояние между параллельными плоскостями равно 17 см.
2) Через точку, не лежащую на сфере, проведены две плоскости, касающиеся сферы. Найдите расстояние от центра сферы до линии пересечения плоскостей, если угол между плоскостями $60°$, а площадь сферы 32π см^2.

114.4. 1) Сечения сферы двумя параллельными плоскостями имеют длины 10π и 24π см. Найдите площадь поверхности сферы, если расстояние между плоскостями равно 7 см и центры сечений лежат на одном радиусе.
2) Через точку на поверхности шара проведены две плоскости, пересекающие его. Обе плоскости удалены от центра сферы на расстояние $2\sqrt{3}$ см, угол между ними равен $60°$. Найдите площади получившихся сечений.

114.5. 1) Радиус сферы разделен на три равные части и через точки деления проведены перпендикулярные радиусу плоскости. Разность длин получившихся сечений равна $6(2\sqrt{2}-\sqrt{5})\pi$ см. Найдите площадь поверхности сферы.
2) Два взаимно перпендикулярных сечения шара имеют общую хорду длиной 12 см. Зная, что площади этих сечений 100π см^2 и 64π см^2, найдите радиус шара.

114.6. 1) Диаметр шара разделен на три части в отношении 1:3:2 и через точки деления проведены перпендикулярные ему плоскости. Найдите площадь поверхности шара, если сумма площадей сечений равна 52π см^2.
2) Площадь большого круга шара равна 50π см^2. Два взаимно перпендикулярных сечения шара имеют общую хорду длиной 6 см. Найдите расстояние от центра шара до плоскостей сечения, если площадь одного из них 25π см^2.

§ 115. КОМБИНАЦИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ТЕЛ

115.1. 1) Осевое сечение конуса — правильный треугольник. В этот конус вписана сфера. Найдите ее площадь, если образующая конуса равна 3 см.
2) Вокруг правильной четырехугольной призмы описан цилиндр. Найдите площадь его боковой поверхности, если высота призмы равна 24 см, а диагональ боковой грани 26 см.

115.2. 1) Осевое сечение конуса — правильный треугольник, вокруг конуса описана сфера. Найдите ее площадь, если радиус основания конуса равен $2\sqrt{3}$ см.
2) В правильную четырехугольную призму вписан цилиндр. Найдите площадь его боковой поверхности, если диагональ основания призмы равна $4\sqrt{2}$ см, а диагональ боковой грани 5 см.

115.3. 1) Вокруг правильной четырехугольной пирамиды описана сфера. Найдите ее площадь, если сторона основания равна $4\sqrt{2}$ см, а боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом $60°$.

2) Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна $4\sqrt{3}$ см, а боковое ребро наклонено к основанию под углом 45°. Найдите площадь боковой поверхности вписанного в пирамиду конуса.

115.4. 1) Диагональ основания правильной четырехугольной пирамиды равна $4\sqrt{6}$ см, а боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 60°. Найдите площадь вписанной в пирамиду сферы.

2) Сторона основания правильной треугольной пирамиды $8\sqrt{3}$ см, а боковые грани наклонены к основанию под углом 45°. Найдите площадь боковой поверхности описанного около пирамиды конуса.

115.5. 1) В основании пирамиды лежит треугольник, у которого одна из сторон имеет длину a, а противолежащий ей угол равен α. Боковые ребра наклонены к основанию под углом φ. Найдите площадь описанной около пирамиды сферы.

2) В правильную четырехугольную пирамиду вписан цилиндр так, что его верхнее основание касается боковых граней пирамиды, а нижнее основание лежит в плоскости основания пирамиды. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, если сторона основания пирамиды равна 10 см, высота цилиндра $4\sqrt{3}$ см, а угол наклона боковых граней к плоскости основания равен 60°.

115.6. 1) В основании пирамиды равнобедренный треугольник, боковая сторона которого равна a, а угол при основании α. Боковые грани пирамиды наклонены к основанию под углом φ. Найдите площадь поверхности вписанной в пирамиду сферы.

2) В конус вписан цилиндр так, что его верхнее основание касается боковой поверхности конуса, а нижнее лежит в плоскости его основания. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, если высота конуса равна $10\sqrt{3}$ см, высота цилиндра $4\sqrt{3}$ см, а образующая наклонена к плоскости основания под углом 60°.

ОБЪЕМЫ ТЕЛ

§ 116. ОБЪЕМ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА

116.1. 1) Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны 5 и 12 см, а его диагональ составляет с плоскостью основания угол 60°. Найдите объем параллелепипеда.

2) Основанием прямой призмы служит прямоугольный треугольник. Катеты основания и боковое ребро относятся между собой как 1:2:3. Объем призмы равен 24 см^3. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

116.2. 1) Боковое ребро и одна из сторон основания прямоугольного параллелепипеда равны соответственно $\frac{20\sqrt{3}}{3}$ и 16 см, а его диагональ составляет с плоскостью основания угол 30°. Найдите объем параллелепипеда.

2) Основанием прямой призмы служит прямоугольный треугольник, катеты которого относятся как 2 : 3. Найдите площадь боковой поверхности призмы, если ее боковое ребро равно 4 см, а объем 48 см^3.

116.3. 1) В правильной четырехугольной призме диагональ равна m и составляет с плоскостью боковой грани угол 30°. Найдите объем призмы.

2) Основанием прямой призмы служит равнобедренный прямоугольный треугольник, катеты которого равны 3 см. Площадь сечения, проведенного через один из катетов основания и противолежащую вершину верхнего основания, равна 7,5 см^2. Найдите объем призмы.

116.4. 1) В прямоугольном параллелепипеде диагональ равна d, а одна из сторон основания $\frac{d}{2}$. Эта диагональ составляет с боковой гранью, содержащей данную сторону, угол 45°. Найдите объем параллелепипеда.

2) Основанием прямой призмы служит прямоугольный треугольник, один из катетов которого равен 4 см. Площадь сечения, проведенного через другой катет и противолежащую ему вершину верхнего основания, равна 15 см^2. Найдите объем призмы, если длина ее бокового ребра равна 3 см.

116.5. 1) Диагональ основания прямоугольного параллелепипеда равна m, а угол между диагоналями основания 60°. Плоскость сечения, проведенного через диагональ основания и противолежащую ей вершину верхнего основания, составляет с плоскостью основания угол 60°. Найдите объем параллелепипеда.

2) Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90°$), у которого $AC = b$ и $\angle A = \alpha$. Диагональ боковой грани B_1C составляет с плоскостью AA_1B_1 угол α. Найдите объем призмы.

116.6. 1) Диагональ основания прямоугольного параллелепипеда равна d, а угол между диагоналями 30°. Плоскость сечения, проведенного через диагональ основания и противолежащую ей вершину верхнего основания, составляет с плоскостью основания угол 45°. Найдите объем параллелепипеда.

2) Основанием прямой призмы $MKPM_1K_1P_1$ служит прямоугольный треугольник MPK ($\angle P = 90°$), у которого $PK = m$ и $\angle M = \alpha$. Диагональ боковой грани M_1P составляет с плоскостью MM_1K_1 угол $90° - \alpha$. Найдите объем призмы.

117.1. 1) Основанием прямой призмы служит треугольник, стороны которого равны 10, 10 и 12. Диагональ меньшей боковой грани составляет с плоскостью основания угол 60°. Найдите объем призмы.

2) Плоскость, параллельная оси цилиндра, отсекает от окружности основания дугу в 120° и удалена от оси на расстояние, равное a. Диагональ в получившемся сечении равна $4a$. Найдите объем цилиндра.

117.2. 1) Основанием прямого параллелепипеда служит параллелограмм, стороны которого 4 и 8 см. Один из его углов равен 30°. Диагональ меньшей боковой грани составляет с плоскостью основания угол 45°. Найдите объем параллелепипеда.

2) Плоскость, параллельная оси цилиндра, отстоит от нее на расстоянии, равном 15. Диагональ получившегося сечения равна 20, а радиус основания цилиндра 17. Найдите объем цилиндра.

117.3. 1) Основанием прямой призмы служит равнобедренная трапеция, основания которой равны 8 и 4 см. Через большее основание трапеции и середину противолежащего бокового ребра проведена плоскость, составляющая с плоскостью основания угол 60°. Площадь сечения равна 48 см². Найдите объем призмы.

2) Через образующую цилиндра проведены две плоскости, пересекающие цилиндр. Угол между плоскостями равен α, а площади получившихся сечений равны Q. Радиус основания цилиндра равен R. Найдите объем цилиндра.

117.4. 1) Основанием прямого параллелепипеда служит ромб с углом 60°. Через сторону основания и середину противолежащего бокового ребра проведена плоскость под углом 45° к плоскости основания. Площадь сечения равна $18\sqrt{6}$ см². Найдите объем параллелепипеда.

2) Через образующую цилиндра проведены две плоскости, пересекающие цилиндр. Угол между плоскостями равен φ, а площади получившихся сечений равны S. Высота цилиндра равна H. Найдите объем цилиндра.

117.5. 1) В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ диагонали B_1F и B_1E равны соответственно 24 и 25. Найдите объем призмы.

2) В правильную четырехугольную пирамиду вписан цилиндр так, что окружность верхнего основания касается боковой поверхности пирамиды, а нижнее основание принадлежит основанию пирамиды. Боковые грани пирамиды составляют с плоскостью основания угол α. Сторона основания равна a. Найдите объем цилиндра, если его осевым сечением является квадрат.

117.6. 1) В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ $C_1E=3$, а $\angle FC_1E=\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$. Найдите объем призмы.

2) В правильную треугольную пирамиду, стороны основания которой равны a, вписан цилиндр так, что окружность верхнего основания касается боковой поверхности пирамиды, а нижнее основание принадлежит основанию пирамиды. Боковые грани пирамиды составляют с плоскостью основания угол φ. Найдите объем цилиндра, если его высота равна диаметру основания.

§ 118. ОБЪЕМ НАКЛОННОЙ ПРИЗМЫ

118.1. 1) В наклонной треугольной призме основанием служит правильный треугольник со стороной, равной $3\sqrt{3}$. Одна из вершин верхнего основания проектируется в центр нижнего. Боковые ребра призмы составляют с плоскостью основания угол 60°. Найдите объем призмы.

2) Площади двух боковых граней треугольной призмы равны 30 и 40 см^2, а угол между ними 120°. Найдите объем призмы, если длина бокового ребра равна 10 см.

118.2. 1) В наклонной треугольной призме основанием служит правильный треугольник. Одна из вершин верхнего основания проектируется в центр нижнего. Боковые ребра призмы составляют с плоскостью основания угол 45°. Найдите объем призмы, если ее высота равна 4.

2) В наклонном параллелепипеде площади двух боковых граней равны 20 и 30 см^2, а угол между ними 60°. Найдите объем параллелепипеда, если его боковое ребро равно 5 см.

118.3. 1) В основании наклонного параллелепипеда лежит прямоугольник. Противоположные его боковые грани перпендикулярны к плоскости основания, а площадь каждой из двух других боковых граней равна 25 см^2. Боковые ребра составляют с плоскостью основания углы 60°. Найдите объем параллелепипеда, если известно, что все его ребра равны между собой.

2) В наклонной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ $\angle A_1AB = \angle A_1AC < 90°$, $AB=AC$, $BC=a$, $AA_1=b$. Угол между равными боковыми гранями равен 120°. Найдите объем призмы.

118.4. 1) В основании наклонной призмы лежит равнобедренный прямоугольный треугольник, катеты которого равны 7 см. Боковая грань, проходящая через один из катетов основания, перпендикулярна плоскости основания, а площадь другой боковой грани, проходящей через другой катет основания, равна 49 см^2. Боковые ребра призмы составляют с плоскостью основания углы 45°. Найдите объем призмы, если боковое ребро ее равно 7 см.

2) В наклонной треугольной призме $DEFD_1E_1F_1$ $\angle E_1ED = \angle E_1EF < 90°$, $EF = ED$, $DF = m$, $EE_1 = l$. Угол между равными боковыми гранями прямой. Найдите объем призмы.

118.5. 1) В наклонной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все ребра равны между собой, $\angle A_1AB = \angle A_1AC = 60°$. Площадь грани CC_1B_1B равна Q. Найдите объем призмы.

2) В наклонной треугольной призме расстояние от бокового ребра до диагонали противолежащей боковой грани равно 5 см, а площадь этой грани 40 см^2. Найдите объем призмы.

118.6. 1) Основанием наклонного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ служит квадрат $ABCD$. Все ребра параллелепипеда равны между собой, $\angle A_1AB = \angle A_1AD = 60°$. Площадь диагонального сечения BB_1D_1D равна S. Найдите объем параллелепипеда.

2) В наклонной треугольной призме угол между боковым ребром и скрещивающейся с ним стороной основания равен 45°. Длина этой стороны равна 6 см, а расстояние от бокового ребра до боковой грани, содержащей эту сторону, 4 см. Длина бокового ребра равна 5 см. Найдите объем призмы.

§ 119. ОБЪЕМ ПИРАМИДЫ

119.1. 1) В правильной треугольной пирамиде радиус описанной около основания окружности равен 4 см. Боковые грани наклонены к основанию под углом 60°. Найдите объем пирамиды.

2) Основанием пирамиды $MABCD$ служит прямоугольник $ABCD$. Ребро MB перпендикулярно плоскости основания, а грани AMD и DMC составляют с ним углы 30° и 45°. Высота пирамиды равна H. Найдите ее объем.

119.2. 1) В правильной четырехугольной пирамиде радиус описанной около основания окружности равен 6 см. Боковые грани наклонены к основанию под углом 60°. Найдите объем пирамиды.

2) Основанием пирамиды $MABCD$ служит прямоугольник $ABCD$, $AB = a$. Ребро MB перпендикулярно плоскости основания, а грани MAD и MCD составляют с ним соответственно углы 30° и 60°. Найдите объем пирамиды.

119.3. 1) В правильной четырехугольной пирамиде расстояние от центра основания до боковой грани равно m. Боковые грани наклонены к основанию под углом α. Найдите объем пирамиды.

2) Основанием пирамиды служит ромб со стороной, равной a, и углом 30°. Боковые грани, проходящие через стороны острого угла ромба, перпендикулярны плоскости основания, а две другие наклонены к нему под углом 60°. Найдите объем пирамиды.

119.4. 1) В правильной треугольной пирамиде расстояние от центра основания до боковой грани равно d. Боковые грани наклонены к основанию под углом φ. Найдите объем пирамиды.

2) Основанием пирамиды $MABC$ служит равнобедренный треугольник ABC, $AC=CB=a$, $\angle ACB=120°$. Грани MAC и MAB перпендикулярны плоскости основания, а третья грань составляет с ним угол 45°. Найдите объем пирамиды.

119.5. 1) В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна a, а угол между смежными боковыми гранями α. Найдите объем пирамиды.

2) Основанием пирамиды $PABC$ служит прямоугольный треугольник ABC ($\angle C=90°$), $BC=a$, $\angle B=60°$. Грань APC перпендикулярна плоскости основания, а две другие наклонены к нему под углом 45°. Найдите объем пирамиды.

119.6. 1) В правильной четырехугольной пирамиде стороны основания равны a, а угол между смежными боковыми гранями α. Найдите объем пирамиды.

2) Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник с углом 60° и прилежащим к нему катетом, равным a. Боковая грань, проходящая через гипотенузу, перпендикулярна плоскости основания, а две другие наклонены к нему под углом 45°. Найдите объем пирамиды.

119.7*. Углы правильного тетраэдра срезаны так, что получился многогранник, у которого 4 грани — правильные треугольники и 4 — правильные шестиугольники. Найдите отношение объема полученного многогранника к объему тетраэдра.

119.8*. Углы октаэдра срезаны так, что получился многогранник, у которого 6 граней — квадраты, а 8 — правильные шестиугольники. Найдите отношение объема полученного многогранника к объему октаэдра.

§ 120. ОБЪЕМ КОНУСА

120.1. 1) Цилиндр и конус имеют равные радиусы оснований и равные высоты. Объем цилиндра 60 см^3. Найдите объем конуса.

2) Боковые ребра правильной четырехугольной пирамиды составляют с основанием угол 45°. Найдите объем описанного около нее конуса, если сторона основания пирамиды равна a.

120.2. 1) Цилиндр и конус имеют равные радиусы оснований и равные высоты. Объем конуса равен 40 см^3. Найдите объем цилиндра.

2) Боковые ребра правильной треугольной пирамиды составляют с основанием угол 60°. Найдите объем описанно-

го около пирамиды конуса, если сторона основания пирамиды равна a.

120.3. 1) Центральный угол в развертке боковой поверхности конуса равен 120°. Высота конуса равна $4\sqrt{2}$. Найдите его объем.

2) В правильной треугольной пирамиде расстояние от вершины основания до противолежащей боковой грани равно m. Боковые грани наклонены к основанию под углом α. Найдите объем вписанного в пирамиду конуса.

120.4. 1) Центральный угол в развертке боковой поверхности конуса равен 240°. Высота конуса равна $2\sqrt{5}$. Найдите его объем.

2) В правильную четырехугольную пирамиду вписан конус. Найдите его объем, если боковые грани пирамиды наклонены к основанию под углом α, а расстояние от середины высоты пирамиды до боковой грани равно d.

120.5. 1) Наибольшая площадь сечения конуса, проведенного через его вершину, в 2 раза больше площади осевого сечения. Найдите объем конуса, если его образующая равна L.

2) Конус вписан в пирамиду, основанием которой служит равнобедренная трапеция, основания которой равны 2 и 8 см. Объем конуса равен $\frac{8\pi\sqrt{3}}{3}$ см^3. Найдите угол наклона боковых граней к плоскости основания.

120.6. 1) Наибольшая площадь сечения конуса, проведенного через его вершину, в $\sqrt{2}$ раза больше площади осевого сечения. Найдите объем конуса, если его высота равна H.

2) Конус описан около пирамиды, основанием которой служит трапеция, три стороны которой равны 3 см, а один из углов 60°. Объем конуса равен 9π см^3. Найдите угол наклона боковых ребер к плоскости основания.

120.7*. Длина бокового ребра правильной треугольной пирамиды 10 см, длина стороны основания 12 см. Боковая грань пирамиды вписана в окружность основания конуса, образующей которого принадлежит боковое ребро пирамиды. Вычислите объем конуса.

120.8*. Основанием пирамиды служит прямоугольник, стороны которого 12 и 4 см. Боковые ребра пирамиды равны 10 см. Боковая грань, проходящая через бóльшую сторону прямоугольника, вписана в окружность основания конуса, а образующая конуса принадлежит высоте противоположной боковой грани, проведенной из вершины пирамиды. Вычислите объем конуса.

§ 121. ОБЪЕМ УСЕЧЕННЫХ ПИРАМИДЫ И КОНУСА

121.1. 1) Стороны оснований правильной усеченной треугольной пирамиды равны 2 и 4 см, угол наклона боковых граней к основанию равен 60°. Найдите объем пирамиды.

2) В прямоугольном треугольнике ABC катеты CA и CB равны a. Этот треугольник вращается вокруг прямой, параллельной катету BC и отстоящей от него на расстояние, равное a (ось вращения и вершина A треугольника находятся по разные стороны от BC). Найдите объем тела вращения.

121.2. 1) Стороны оснований правильной треугольной усеченной пирамиды равны 1 и 2 см, угол наклона боковых ребер к основанию равен 45°. Найдите объем пирамиды.

2) В прямоугольном треугольнике ABC катеты CA и CB равны a. Этот треугольник вращается вокруг прямой, параллельной катету AC и отстоящей от вершины B треугольника на расстояние, равное a (ось вращения и катет AC находятся по разные стороны от вершины B). Найдите объем тела вращения.

121.3. 1) В правильной четырехугольной усеченной пирамиде сторона большего основания равна $2\sqrt{2}$ см, боковое ребро 2 см, а диагональ осевого сечения $2\sqrt{3}$ см. Найдите объем пирамиды.

2) В равнобедренном треугольнике ABC $AB=BC=10$, $AC=12$. Треугольник вращается вокруг оси, проходящей через вершину C и перпендикулярной AC. Найдите объем тела вращения.

121.4. 1) В правильной треугольной усеченной пирамиде расстояние от середины стороны верхнего основания до противолежащей вершины нижнего основания равно $2\sqrt{3}$ см. Найдите объем пирамиды, если сторона большего основания равна $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ см, а апофема пирамиды равна 2 см.

2) В равнобедренном треугольнике ABC $AC=CB=25$, $AB=48$. Треугольник вращается вокруг оси, проходящей через вершину B и перпендикулярной AB. Найдите объем тела вращения.

121.5. 1) Стороны оснований в правильной четырехугольной усеченной пирамиде равны 6 и 10 см. Через одну из вершин верхнего основания перпендикулярно диагонали этого основания (диагональ проходит через эту вершину) проведена плоскость. Площадь сечения равна $6\sqrt{2}$ см^2. Найдите объем пирамиды.

2) Параллелограмм $ABCD$ вращается вокруг прямой, проходящей через вершину A параллельно меньшей диагонали BD. Найдите объем тела вращения, если в данном параллелограмме $\angle A=60°$, бóльшая сторона 6 дм, а меньшая диагональ перпендикулярна стороне.

121.6. 1) В правильной треугольной усеченной пирамиде сторона верхнего основания равна 2 дм, а боковые ребра наклонены к основанию под углом 60°. Через сторону верхнего основания параллельно противолежащему боковому ребру проведена плоскость. Площадь сечения равна $4\sqrt{3}$ дм². Найдите объем пирамиды.

2) Расстояние между основаниями перпендикуляров, опущенных из вершины тупого угла ромба на его стороны, равно 20 см. Найдите объем тела, полученного от вращения ромба вокруг оси, проходящей через вершину острого угла, равного 60°, и перпендикулярной большей диагонали.

§ 122. ОБЪЕМ ШАРА И ПЛОЩАДЬ СФЕРЫ

122.1. 1) Шар, объем которого равен 36π см³, пересечен плоскостью, проходящей через его центр. Найдите площадь поверхности каждой из образовавшихся частей шара.

2) Сторона основания и боковое ребро правильной четырехугольной призмы равны соответственно 6 и $2\sqrt{7}$ дм. Найдите объем описанного около призмы шара.

122.2. 1) Шар пересечен плоскостью, проходящей через его центр. Площадь каждой из образовавшихся частей шара равна 12π см². Найдите объем шара.

2) Шар описан около цилиндра. Найдите объем шара, если высота цилиндра равна $2\sqrt{7}$ дм, а сторона правильного треугольника, вписанного в его основание, равна $3\sqrt{3}$ дм.

122.3. 1) Радиус основания цилиндра равен 2, а высота равна 4. Поместится ли в этот цилиндр шар, объем которого в 2 раза меньше объема цилиндра?

2) Боковые ребра правильной треугольной пирамиды наклонены к основанию под углом 30°. Найдите объем пирамиды, если площадь описанной около нее сферы равна 16π дм².

122.4. 1) Радиус основания цилиндра равен 2, а высота равна 10. Поместится ли в этот цилиндр шар, объем которого в 3 раза меньше объема цилиндра?

2) Образующие конуса наклонены к основанию под углом 15°. Найдите объем конуса, если площадь описанной около него сферы равна 36π дм².

122.5. 1) Осевое сечение сосуда, имеющего форму конуса, поставленного на вершину, представляет равносторонний треугольник. В сосуд помещен шар, радиус которого равен r, касающийся боковой поверхности конуса и верхнего уровня воды, заполнившей сосуд доверху. До какого уровня опустится вода, если шар вынуть из сосуда?

2) В правильную четырехугольную пирамиду вписана сфера, центр которой делит высоту пирамиды в отноше-

нии 5:3, считая от вершины. Найдите площадь сферы, если сторона основания пирамиды равна 18 см.

122.6. 1) Осевое сечение сосуда цилиндрической формы представляет квадрат. В сосуд помещен шар, касающийся цилиндрической поверхности, дна и верхнего уровня воды, заполнившей сосуд доверху. После того как шар вынули из воды, ее уровень опустился до 10 см. Найдите объем шара.

2) В правильную треугольную пирамиду вписана сфера, центр которой делит высоту пирамиды в отношении 5:4, считая от вершины. Найдите площадь сферы, если сторона основания пирамиды равна $12\sqrt{3}$ см.

122.7*. Объем конуса в $2\frac{1}{4}$ раза больше объема вписанного в него шара. Найдите величину угла между образующей конуса и плоскостью основания.

122.8*. Отношение объема конуса к объему вписанного в конус шара равно 8:3. Найдите величину угла при вершине осевого сечения конуса.

ИТОГОВОЕ ПОВТОРЕНИЕ КУРСА СТЕРЕОМЕТРИИ

§ 123. МЕТОД КООРДИНАТ И ВЕКТОРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

123.1. 1) Тетраэдр $DABC$ задан координатами своих вершин $D(2;\ 1;\ 3)$, $A(1;\ 0;\ 0)$, $B(-1;\ 1;\ 0)$, $C(2;\ -1;\ 0)$.

а) В какой координатной плоскости лежит основание тетраэдра ABC?

б) Найдите объем тетраэдра.

2. Дана правильная треугольная пирамида $MABC$. Найдите скалярное произведение $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}$.

123.2. 1) Тетраэдр $PEFK$ задан координатами своих вершин $P(2;\ 3;\ -6)$, $E(2;\ -1;\ 0)$, $F(1;\ -2;\ 0)$, $K(-1;\ 3;\ 0)$.

а) В какой координатной плоскости лежит основание тетраэдра EFK?

б) Найдите объем тетраэдра.

2) Дана правильная четырехугольная пирамида $MABCD$. Найдите скалярное произведение $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{MC}$.

123.3. 1) Пирамида $MABCD$ задана координатами своих вершин $M(-1;\ 2;\ 5)$, $A(1;\ -1;\ 2)$, $B(-2;\ 1;\ 2)$, $C(-1;\ 3;\ 2)$, $D(3;\ 1;\ 2)$.

а) Как расположена плоскость основания $ABCD$ относительно координатных плоскостей?

б) Найдите объем пирамиды.

2) В тетраэдре $MABC$ $\angle MAC=\angle MAB$, $AB=AC$. Найдите скалярное произведение $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}$.

123.4. 1) Пирамида $PEFKM$ задана координатами своих вершин

$P(2;\ -4;\ -5)$, $E(2;\ -3;\ 1)$, $F(1;\ -2;\ 1)$, $K(0;\ 1;\ 1)$, $M(3;\ -1;\ 1)$.

а) Как расположена плоскость основания $EFKM$ относительно координатных плоскостей?

б) Найдите объем пирамиды.

2) Основанием четырехугольной пирамиды $MABCD$ служит ромб $ABCD$, $\angle MAB = \angle MAD$. Найдите скалярное произведение $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BD}$.

123.5. 1) В тетраэдре $DABC$ $DB \perp ABC$ и угол между AD и BC равен 60°. Найдите площадь поверхности тетраэдра, если известны координаты вершин его основания: $A(0;\ -2;\ 0)$, $C(0;\ 0;\ 0)$, $B(-2;\ 0;\ 0)$.

2) В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ E — середина AA_1, M — середина AD, а F — центр грани DD_1C_1C. Найдите скалярное произведение $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{B_1M}$.

123.6. 1) В пирамиде $MABCD$ известны координаты вершин основания: $A(2;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ 0;\ 0)$, $C(0;\ 2;\ 0)$, $D(2;\ 2;\ 0)$, $MB \perp ABC$. Найдите площадь поверхности пирамиды, если угол между MC и BD равен 60°.

2) В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ P — середина AA_1, K — середина CD, а Q — центр грани BB_1C_1C. Найдите скалярное произведение $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{B_1K}$.

§ 124. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ

124.1. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

1) Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через BD и середину D_1C_1 — точку E.

2) Каково взаимное положение прямых:

а) BD и FE, где FE — линия пересечения секущей плоскости с плоскостью $A_1B_1C_1$;

б) DE и CC_1;

в) AA_1 и FE?

3) Найдите отношение объемов частей куба, разделенных этой плоскостью.

124.2. Дана прямая призма $ABCA_1B_1C_1$, основанием которой служит равнобедренный прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90°$). Боковое ребро призмы равно катету основания.

1) Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через AC и середину C_1B_1 — точку F.

2) Каково взаимное положение прямых:

а) AC и EF, где EF — линия пересечения секущей плоскости с плоскостью $A_1B_1C_1$;

б) EF и AA_1;

в) FC и BB_1?

3) Найдите отношение объемов частей призмы, разделенных этой плоскостью.

124.3. Основанием прямого параллелепипеда служит ромб с углом 60°. Боковое ребро параллелепипеда в 2 раза больше стороны его основания.

1) Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через сторону основания и середину противолежащего бокового ребра.

2) Какой угол с основанием составляет плоскость сечения?

3) Найдите отношение объемов частей параллелепипеда, разделенных этой плоскостью.

124.4. В правильной треугольной призме боковое ребро вдвое больше стороны основания.

1) Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через вершину основания и середину противолежащего бокового ребра параллельно противолежащей стороне основания.

2) Какой угол с основанием составляет плоскость сечения?

3) Найдите отношение объемов частей призмы, разделенных этой плоскостью.

124.5. В правильной треугольной пирамиде $MABC$ боковые грани наклонены к основанию под углом 60°.

1) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через вершину A, которая была бы перпендикулярна грани MBC и параллельна BC.

2) Какой угол составляет с этой плоскостью ребро AM?

3) Найдите отношение объемов частей пирамиды, разделенных этой плоскостью.

124.6. В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$ боковые грани наклонены к основанию под углом 60°.

1) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через сторону CD перпендикулярно к грани AMB.

2) Какой угол составляет с этой плоскостью ребро MC?

3) Найдите отношение объемов частей пирамиды, разделенных этой плоскостью.

§ 125. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

125.1. В правильной треугольной пирамиде $DABC$ боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом 45°. Высота пирамиды равна H.

1) Докажите, что плоскость ADE, где E — середина BC, перпендикулярна плоскости основания.

2) Найдите величину двугранного угла $DBCA$.

3) Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

4) Найдите площадь описанной около пирамиды сферы.

125.2. В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$ боковое ребро наклонено к основанию под углом 45°, а сторона основания равна a.

1) Докажите, что плоскость AMC перпендикулярна плоскости основания.

2) Найдите величину двугранного угла $MCDA$.

3) Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

4) Найдите объем описанного около пирамиды шара.

125.3. В правильной четырехугольной пирамиде боковые грани наклонены к основанию под углом α. Радиус вписанного в пирамиду шара равен R. Найдите:

1) площадь боковой поверхности пирамиды;

2) расстояние от центра основания до боковой грани;

3) угол между боковым ребром и плоскостью основания.

125.4. В правильной треугольной пирамиде боковые грани наклонены к основанию под углом α. Радиус вписанного в пирамиду шара равен R. Найдите:

1) площадь боковой поверхности пирамиды;

2) расстояние от центра основания до боковой грани;

3) угол между боковым ребром и плоскостью основания.

125.5. В цилиндр вписана пирамида $DABC$ так, что основание пирамиды ABC вписано в основание цилиндра, а ребро DB совпадает с его образующей. Известно, что $AB=BC$, $AC=a$, $\angle BAC=\alpha$, а площадь описанной около пирамиды сферы равна $2\pi a^2$.

1) Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

2) Найдите угол между ребром DB и плоскостью ADC.

3) Каково отношение объемов пирамиды и цилиндра?

125.6. В цилиндр вписана пирамида $DABC$ так, что основание пирамиды ABC вписано в основание цилиндра, а ребро AD совпадает с его образующей. Известно, что $AB=AC=a$, $\angle A=\alpha$, а объем описанного около пирамиды шара равен $\frac{\pi a^3\sqrt{2}}{3}$.

1) Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

2) Найдите угол между ребром AD и плоскостью BDC.

3) Каково отношение объемов пирамиды и цилиндра?

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Задание 1

НАЧАЛЬНЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

1.1. 1) Три точки B, D и C лежат на прямой q. Известно, что $BD=17$ см, $DC=25$ см. Какой может быть длина отрезка BC?

2) Прямые MC и DE пересекаются в точке O так, что сумма углов MOE и DOC равна 204°. Найдите угол MOD.

3)* Зная, что $AB=6$ см, найдите на прямой AB все такие точки X, что $XA+XB=10$.

1.2. 1) Точки E, F и K лежат на прямой m, $EF=12$ см, $FK=15$ см. Какой может быть длина EK?

2) Прямые AB и CD пересекаются в точке O так, что угол AOC в 2 раза больше угла COB. Найдите угол DOB.

3)* Зная, что $EF=10$ см, найдите на прямой EF все такие точки Y, что $YE+YF=9$.

1.3. 1) Три точки M, N и K лежат на прямой b. Известно, что $MK=15$ см, $NK=18$ см. Какой может быть длина отрезка MK?

2) Прямые AD и BC пересекаются в точке O так, что сумма углов AOB и COD равна 108°. Найдите угол BOD.

3)* Зная, что $MN=7$ см, найдите на прямой MN все такие точки Z, что $ZM+ZN=11$.

1.4. 1) На прямой a лежат точки M, K и L, $MK=25$ см, $KL=4$ см. Каким может быть расстояние ML?

2) Прямые EF и OM пересекаются в точке O так, что угол EOM на 20° больше угла MOF. Найдите угол EOM.

3)* Зная, что $KL=5$, найдите на прямой KL все такие точки M, что $KM+LM=4$.

Задание 2

ТРЕУГОЛЬНИКИ

2.1. 1) На рисунке 235 $BO=CO$, $\angle ABD=\angle ACD$. Докажите, что $\triangle AOB=\triangle DOC$.

2) Луч AD — биссектриса угла BAC (рис. 236). Докажите, что $\triangle ABD=\triangle ACD$, если $AB=AC$.

3)* Треугольник ABC равнобедренный, BK — высота треугольника (рис. 237). Найдите:

а) $\angle ACE$, если $\angle A=70°$;

б) AK, если периметр треугольника равен 20 см и $AB=8$ см.

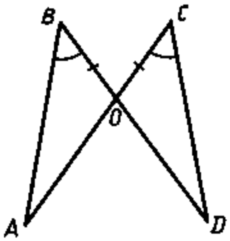

Рис. 235

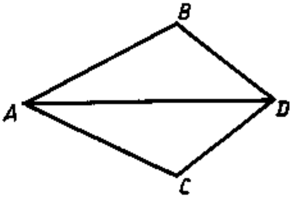

Рис. 236

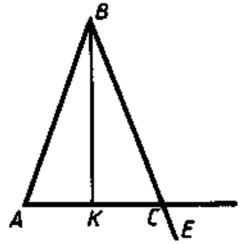

Рис. 237

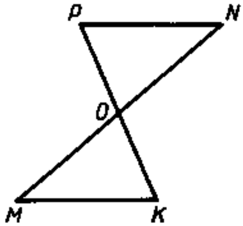

Рис. 238

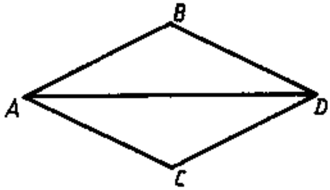

Рис. 239

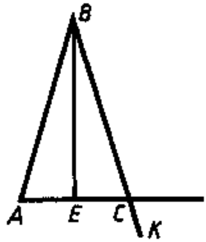

Рис. 240

2.2. 1) Отрезки MN и PK имеют общую середину (рис. 238). Докажите, что $\triangle NOP = \triangle MOK$.

2) Луч AD — биссектриса угла BAC (рис. 239). Докажите, что $AB = AC$, если известно, что $\angle ADB = \angle ADC$.

3)* Треугольник ABC равнобедренный, BE — биссектриса треугольника (рис. 240). Найдите:

а) $\angle BAC$, если $\angle ACK = 107°$;

б) периметр треугольника ABC, если $EA = 3$ см, $BC = 10$ см.

2.3. 1) На рисунке 241 $DO = OB$, $\angle ADO = \angle CBO$. Докажите, что $\triangle AOD = \triangle COB$.

2) На рисунке 242 $OM = MP$ и $OE = PE$. Докажите, что луч EM — биссектриса угла OEP.

3)* Треугольник ABC равнобедренный, BD — высота треугольника (рис. 243). Найдите:

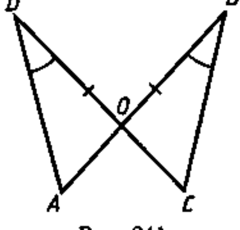

Рис. 241

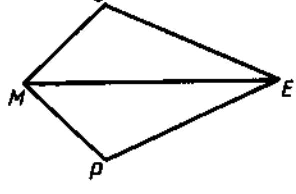

Рис. 242

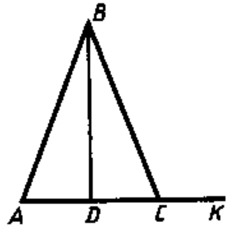

Рис. 243

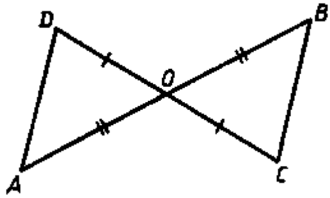

Рис 244

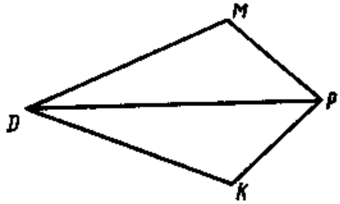

Рис. 245

а) DC, если $AB=12$ см и периметр треугольника равен 32 см;
б) $\angle BCK$, если $\angle A=65°$.

2.4. 1) Отрезки AB и CD точкой пересечения делятся пополам (рис. 244). Докажите, что $\triangle DOA=\triangle COB$.

2) На рисунке 245 $MP=KP$, $DM=DK$. Докажите, что луч DP — биссектриса угла MDK.

3)* Треугольник ABC равнобедренный, BD — биссектриса треугольника (рис. 246). Найдите:
а) $\angle BCA$, если $\angle FAB=130°$;
б) периметр треугольника ABC, если $AB=50$ мм, $AD=20$ мм.

Задание 3

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ

3.1 1) Отрезки PK и MN пересекаются в их середине O. Докажите, что прямые PM и KN параллельны.

2) Прямые AD и BK параллельны, $\angle ABK=54°$, BD — биссектриса угла ABK (рис. 247). Найдите углы треугольника ABD.

3)* Даны два взаимно перпендикулярных диаметра окружности, из которых один делит хорду пополам. Докажите, что хорда и другой диаметр параллельны.

3.2. 1) На прямой a расположены стороны AC и A_1C_1 треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ (вершины B и B_1 находятся по одну сторону от a), $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$, $\angle BAC=$ $=\angle B_1A_1C_1$. Докажите, что $BC\parallel B_1C_1$.

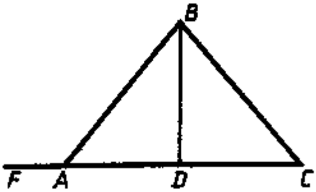

Рис. 246

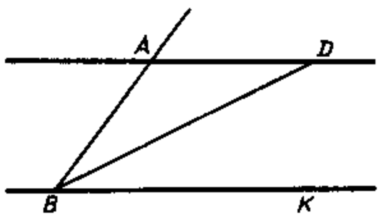

Рис. 247

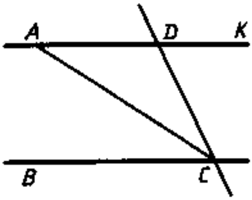

Рис. 248

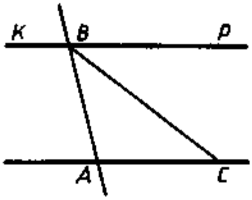

Рис. 249

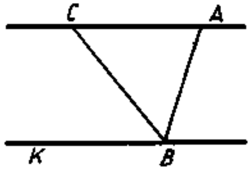

Рис. 250

2) Прямые AD и BC параллельны, $\angle DAC=32°$, CA — биссектриса угла BCD (рис. 248). Найдите угол CDK.
3)* Хорда параллельна диаметру окружности, другой диаметр проходит через ее середину. Докажите, что эти диаметры взаимно перпендикулярны.

3.3. 1) Точка O является общей серединой отрезков PM и KN. Докажите, что прямые PK и MN параллельны.
2) Прямые AC и BK параллельны, $\angle BCA=37°$, BC — биссектриса угла ABP (рис. 249). Найдите угол KBA.
3)* Диаметр окружности делит две хорды пополам. Докажите, что эти хорды параллельны.

3.4. 1) На прямой a расположены стороны AC и A_1C_1 треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ (вершины B и B_1 находятся по одну сторону от a), $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$, $BC=B_1C_1$. Докажите, что $AB \parallel A_1B_1$.
2) Прямые AC и BK параллельны, $\angle CAB=88°$, BC — биссектриса угла ABK (рис. 250). Найдите угол ACB.
3)* Даны две параллельные хорды окружности. Диаметр делит одну из них пополам. Докажите, что и вторая хорда делится этим диаметром пополам.

Задание 4

СУММА УГЛОВ ТРЕУГОЛЬНИКА. СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ ТРЕУГОЛЬНИКА

4.1. 1) Треугольник ABC равнобедренный ($AB=AC$), $\angle ABC=20°$ (рис. 251). Найдите угол DCF.
2) Точка D лежит на стороне AC треугольника ABC, $\angle BDA=40°$. Докажите, что $BC>BD$. Может ли угол C быть равным 41°, 40°, 39°? Ответ обоснуйте.
3)* В треугольнике KAC $\angle KAC=100°$, $\angle AKC=20°$, $D\in KC$, $\angle DAC=60°$, $DC=12$ см. Найдите периметр треугольника ADC.

4.2. 1) Треугольник ABC равнобедренный ($AB=BC$), $\angle DCE=40°$ (рис. 252). Найдите угол ABC.

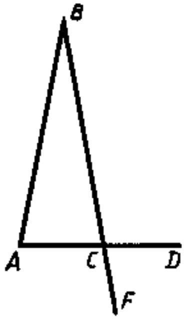

Рис. 251

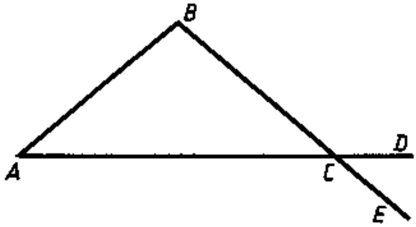

Рис. 252

2) Точка M лежит на стороне ED треугольника FED, в котором угол E тупой, $\angle FMD = 100°$. Докажите, что $FE > ME$. Может ли угол D быть равен 79°, 80°, 81°? Ответ обоснуйте.

3)* В треугольнике MOP $\angle OMP = 10°$, $\angle MPO = 60°$, $K \in MP$, $\angle MOK = 50°$, $OP = 8$ см. Найдите периметр треугольника OKP.

4.3. 1) Треугольник ABC равнобедренный ($AB = BC$), $\angle DBE = 50°$ (рис. 253). Найдите угол BCA.

2) Точка F лежит на стороне KE треугольника KCE, $\angle CFE = 70°$. Докажите, что $KC > CF$. Может ли угол K быть равен 71°, 70°, 69°? Ответ обоснуйте.

3)* В треугольнике ABC $\angle ABC = 50°$, $D \in BC$, $\angle BAD = 10°$, $\angle DAC = 60°$, $AD = 7$ см. Найдите периметр треугольника ADC.

4.4. 1) На рисунке 254 треугольник PTK равнобедренный ($PT = KT$), $\angle TKP = 40°$. Найдите угол MTN.

2) Точка N лежит на стороне AM треугольника APM, $\angle ANP = 105°$, $\angle NPM = 60°$. Докажите, что $MN < PM$. Может ли угол A быть равным 74°, 75°, 76°? Ответ обоснуйте.

3)* В треугольнике ABC $\angle BAC = 100°$, $\angle ABC = 20°$. $K \in BC$, $\angle AKB = 120°$. Периметр треугольника AKC равен 39 см. Найдите AK.

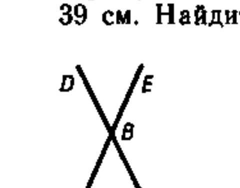

Рис. 253

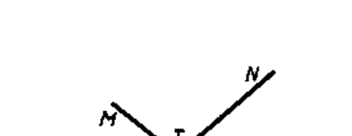

Рис. 254

Задание 5

СВОЙСТВА ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

5.1. 1) Дано: $AD \perp DC$, $BC \perp DC$, $OD = OC$ (рис. 255). Докажите, что $AO = BO$.

2) В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) $\angle B = 60°$, $AC = 10$ см. Найдите расстояние от вершины C до прямой AB.

3)* CM — медиана прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$), $BK \perp MC$, $MK = KC$. Найдите углы треугольника AMC.

5.2. 1) Дано: $\angle PKO = \angle MTO = 90°$, $PO = OM$ (рис. 256). Докажите, что $PK = MT$.

2) В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) $\angle B = 60°$. Расстояние от вершины C до AB равно 7 см. Найдите AC.

3)* BE — высота равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$), $EK \perp AB$, $\angle AEK = \angle BEK$. Найдите углы треугольника ABC.

5.3. 1) Дано: $AB \perp BD$, $CD \perp BD$, $\angle BAD = \angle BCD$ (рис. 257). Докажите, что $AD = BC$.

2) В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) $CK \perp AB$, $\angle ACK = 60°$, $AC = 28$ см. Найдите расстояние от вершины C до гипотенузы.

3)* PO — высота равнобедренного треугольника EPT ($EP = PT$), OM — медиана треугольника EOP, $PK \perp MO$, $\angle MPK = \angle OPK$. Найдите углы треугольника EPT.

5.4. 1) Дано: $\angle BAD = \angle BCD = 90°$, $\angle CBD = \angle ADB$ (рис. 258). Докажите, что $AB = CD$.

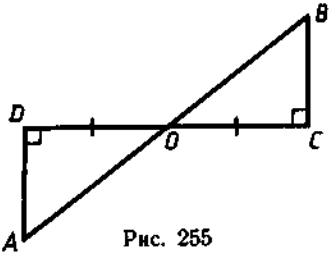

Рис. 255

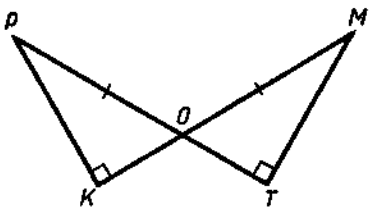

Рис. 256

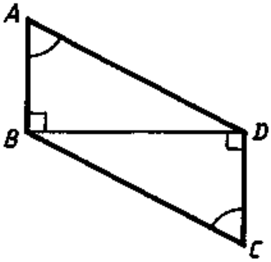

Рис. 257

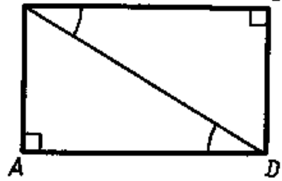

Рис. 258

2) В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C=90°$) $CE \perp AB$, $CE=14$ см, $\angle ACE=60°$. Найдите расстояние от вершины A до катета BC.

3)* CE — медиана равнобедренного треугольника ACB ($AC=CB$), $ET \perp AC$ и $AT=TC$. Найдите углы треугольника BEC.

Задание 6

МНОГОУГОЛЬНИКИ

6.1. 1) Диагонали прямоугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Найдите углы треугольника COD, если $\angle ADB=40°$.

2) В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла C пересекает сторону AB в точке M.

а) Докажите, что треугольник CBM равнобедренный.

б) Найдите периметр параллелограмма, если $AM=3{,}7$ дм, $MB=5{,}9$ дм.

3) Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O, P — середина отрезка OB, K — середина отрезка OD. Докажите, что $APCK$ — параллелограмм.

4)* Постройте ромб по диагонали и перпендикуляру, проведенному из точки пересечения диагоналей к прямой, содержащей сторону ромба.

6.2. 1) В ромбе $ABCD$ $\angle BAC : \angle ABD = 1:2$. Найдите углы ромба.

2) На стороне BC параллелограмма $ABCD$ взята точка E так, что $AB=BE$.

а) Докажите, что AE — биссектриса угла A параллелограмма.

б) Найдите периметр параллелограмма, если $CD=6$ см, $EC=8{,}5$ см.

3) На сторонах AB и CD параллелограмма $ABCD$ взяты точки M и K соответственно, $AM=MB$, $CK=KD$. Докажите, что $MBKD$ — параллелограмм.

4)* Постройте прямоугольник по стороне и углу между диагоналями, противолежащему этой стороне.

6.3. 1) В ромбе $ABCD$ $\angle BAD : \angle ABC = 1:5$. Найдите угол BAC и угол ABD.

2) В параллелограмме $ABCD$ проведена биссектриса угла B, которая пересекает сторону AD в точке M.

а) Докажите, что треугольник ABM равнобедренный.

б) Найдите периметр параллелограмма, если $AM=4{,}5$ см, $DM=2{,}5$ см.

3) Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K, а биссектриса угла C пересекает сторону AD в точке M. Докажите, что $AKCM$ — параллелограмм.

4)* Постройте прямоугольник по стороне и перпендикуляру, проведенному из вершины прямоугольника к его диагонали.

6.4. 1) Диагонали прямоугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Найдите углы треугольника AOD, если $\angle COD = 50°$.

2) На стороне AD параллелограмма $ABCD$ взята точка M так, что $DM = DC$.

а) Докажите, что CM — биссектриса угла C параллелограмма.

б) Найдите периметр параллелограмма, если $AB = 8{,}5$ см, $AM = 3{,}5$ см.

3) AC — диагональ параллелограмма $ABCD$. Биссектриса угла BAC пересекает сторону BC в точке K, а биссектриса угла ACD пересекает сторону AD в точке P. Докажите, что $APCK$ — параллелограмм.

4)* Постройте ромб по диагонали и углу ромба, противолежащему этой диагонали.

Задание 7

ПЛОЩАДИ

7.1. 1) Смежные стороны параллелограмма равны 52 и 30 см, а острый угол равен 30°. Найдите площадь параллелограмма.

2) Вычислите площадь трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC, если $AD = 24$ см, $BC = 16$ см, $\angle A = 45°$, $\angle D = 90°$.

3) Дан треугольник ABC. На стороне AC отметьте точку K так, чтобы площадь треугольника ABK была вдвое больше площади треугольника BKC.

4)* Высота равностороннего треугольника равна 6 см. Найдите сумму расстояний от произвольной точки, взятой внутри этого треугольника, до его сторон.

7.2. 1) Высота BK, проведенная к стороне AD параллелограмма $ABCD$, делит эту сторону на два отрезка $AK = 7$ см, $KD = 15$ см. Найдите площадь параллелограмма, если $\angle A = 45°$.

2) Вычислите площадь трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC, если $BC = 13$ см, $AD = 27$ см, $CD = 10$ см, $\angle D = 30°$.

3) Дан треугольник MKP. На стороне MK отметьте точку T так, чтобы площадь треугольника MTP была втрое меньше площади треугольника MKP.

4)* В разностороннем треугольнике большая сторона составляет 0,75 от суммы двух других. Точка M, принадлежащая этой стороне, является концом биссектрисы треугольника. Найдите расстояние от точки M до меньшей стороны треугольника, если меньшая высота треугольника равна 4 см.

7.3. 1) В треугольнике ABC высоты AA_1 и BB_1 равны соответственно 5 и 7 см, $BC = 21$ см. Найдите AC.

2) В трапеции $ABCD$ угол BAD прямой. Диагональ AC равна боковой стороне CD и составляет с ней угол 90°. Высота трапеции CK равна 6 см. Найдите площадь трапеции.

3) Постройте параллелограмм, имеющий такую же площадь, как данный треугольник.

4)* В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ проведены диагонали. Известно, что площади треугольников ABD, ACD, BCD равны. Докажите, что данный четырехугольник является параллелограммом.

7.4. 1) В треугольнике MPK $MP=14$ см, $PK=21$ см, высота KK_1 равна 18 см. Найдите высоту MM_1.

2) В трапеции $ABCD$ $\angle A=90°$. Высота CK составляет с диагональю AC и боковой стороной CD углы, равные 45°, $AK=8$ см. Найдите площадь трапеции.

3) Постройте треугольник, имеющий такую же площадь, как данный параллелограмм.

4)* В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ проведены диагонали. Известно, что площади треугольников ABD и ACD равны, а площади треугольников ACD и BCD не равны. Докажите, что данный четырехугольник является трапецией.

Задание 8

ПОДОБИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

8.1. 1) На рисунке 259 $AB=7{,}5$, $BC=10{,}5$, $BE=2{,}5$, $BD=3{,}5$.

а) Докажите, что прямые DE и AC параллельны.

б) Найдите отношение периметров и площадей треугольников ABC и EBD.

2) AC — диагональ прямоугольника $ABCD$. Основание перпендикуляра BK, проведенного к этой диагонали, делит ее на части 3 и 9 см. Найдите площадь прямоугольника.

3)* Диагональ трапеции с основаниями 4 и 16 см делит ее на два подобных треугольника. Найдите длину этой диагонали.

8.2. 1) $ABCD$ — трапеция, $AK:KB=2:7$ (рис. 260).

а) Докажите, что $PK\cdot BK=AK\cdot KC$.

б) Найдите отношение площадей и периметров треугольников APK и KBC.

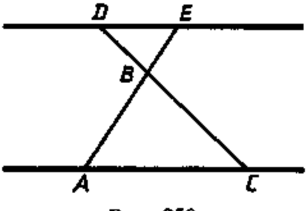

Рис. 259

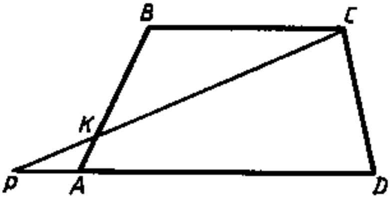

Рис. 260

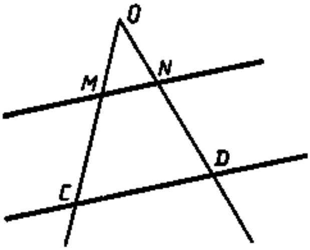

Рис. 261

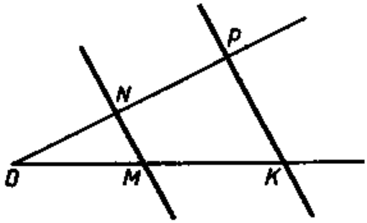

Рис. 262

2) Диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O, OK — перпендикуляр к стороне AB, $OK=4\sqrt{3}$ см. Найдите периметр ромба, если $OB=8$ см.

3)* В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $AB=6$ см, $BC=9$ см, $CD=10$ см, $DA=25$ см, $AC=15$ см. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — трапеция.

8.3. 1) Прямые MN и CD параллельны (рис. 261).

а) Докажите, что $OM \cdot OD = OC \cdot ON$.

б) Найдите отношение площадей и периметров треугольников OMN и OCD, если $OM=2$ см, $MC=3$ см.

2) $ABCD$ — прямоугольник, OD — высота треугольника ACD. Найдите периметр прямоугольника, если $DO=4{,}8$ см, $AO=3{,}6$ см.

3)* Диагональ трапеции, равная 6 см, делит ее на два подобных треугольника. Найдите меньшее основание, если большее равно 12 см.

8.4. 1) На рисунке 262 $OM=13{,}5$ см, $OK=27$ см, $ON=5{,}5$ см, $OP=11$ см.

а) Докажите, что прямые MN и KP параллельны.

б) Найдите отношение площадей и периметров треугольников OMN и OKP.

2) Найдите площадь ромба $ABCD$, если основание перпендикуляра, проведенного из точки пересечения диагоналей до одной из сторон, делит ее на отрезки 2 и 8 см.

3)* Докажите, что прямые AB и CD параллельны, если четырехугольник $ABCD$ выпуклый и $AB=9$ см, $BC=8$ см, $CD=16$ см, $AD=6$ см, $BD=12$ см.

Задание 9

СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

9.1. 1) В треугольнике ABC $\angle C=90°$, $BC=7{,}9$, $AC=16{,}3$. Найдите неизвестные элементы этого треугольника.

2) В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 15 см, а угол при вершине 140°. Найдите основание треугольника.

3) Сторона ромба равна a, а его острый угол α. Найдите диагонали ромба.

4)* В остроугольном треугольнике ABC найдите отношение синусов углов A и B, если $BC=a$, $AC=b$.

9.2. 1) В треугольнике MKE $\angle M=90°$, $KE=12{,}5$, $KM=10{,}24$. Найдите неизвестные элементы этого треугольника.

2) В равнобедренном треугольнике высота, опущенная на основание, равна 17 см, а угол при вершине 130°. Найдите основание треугольника.

3) Острый угол ромба равен α, а его бóльшая диагональ равна d. Найдите сторону ромба и другую диагональ.

4)* В остроугольном треугольнике ABC найдите отношение сторон AB и BC, если синусы углов A и C равны соответственно p и k.

9.3. 1) В треугольнике EPK $\angle P=90°$, $EP=0{,}29$, $PK=0{,}195$. Найдите неизвестные элементы этого треугольника.

2) В равнобедренном треугольнике основание равно 28 см, а угол при вершине 70°. Найдите длину боковой стороны.

3) В прямоугольной трапеции основания равны a и $2a$, острый угол равен α. Найдите неизвестные стороны трапеции.

4)* В треугольнике ABC угол B тупой. Синус внешнего угла при вершине B равен x, $AB=c$. Найдите AC, если синус угла ACB равен y.

9.4. 1) В треугольнике PKD $\angle K=90°$, $PK=18{,}2$, $KD=14{,}9$. Найдите неизвестные элементы этого треугольника.

2) В равнобедренном треугольнике основание равно 24 см, а угол при вершине 58°. Найдите высоту, опущенную на основание треугольника.

3) В прямоугольной трапеции бóльшая боковая сторона равна меньшему основанию и равна a. Острый угол равен α. Найдите неизвестные стороны трапеции.

4)* В треугольнике ABC угол C тупой. Синус угла B равен x, $AC=b$, $AB=c$. Найдите синус внешнего угла треугольника при вершине C.

Задание 10

ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ ОКРУЖНОСТИ

10.1. 1) Окружность с центром O и радиусом R описана около треугольника ABC. Найдите сторону AB треугольника, если $R=16$ см, $\angle OAB=30°$.

2) С помощью циркуля и линейки постройте окружность, вписанную в разносторонний треугольник.

3) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник, стороны которого равны 16, 17 и 17 см.

4)* Периметр треугольника равен 20 см. Может ли радиус описанной около него окружности быть равен 3 см?

10.2. 1) Треугольник ABC вписан в окружность с центром O. Найдите радиус окружности, если $AC=24$ см, $\angle COA=90°$.

2) С помощью циркуля и линейки постройте треугольник, описанный около данной окружности.

3) В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 10 см, а медиана, проведенная к основанию, 8 см. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

4)* Радиус окружности, описанной около треугольника, равен 5 см. Может ли периметр треугольника быть равен 30 см?

10.3. 1) В треугольнике ABC $\angle A=50°$, $\angle C=70°$, O — центр вписанной в треугольник окружности, $OB=10$ см. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник.

2) С помощью циркуля и линейки постройте окружность, описанную около данного тупоугольного треугольника.

3) В некотором остроугольном треугольнике радиус описанной окружности равен одной из сторон. Найдите градусную меру угла, противолежащего этой стороне.

4)* Периметр треугольника равен 30 см. Может ли радиус окружности, вписанной в этот треугольник, быть равным 5 см?

10.4. 1) В треугольнике ABC $\angle A=120°$. Радиус окружности, вписанной в треугольник, равен 10 см. Найдите расстояние от центра этой окружности до вершины A.

2) С помощью циркуля и линейки постройте окружность, описанную около данного остроугольного треугольника.

3) В некотором остроугольном треугольнике одна из сторон больше радиуса описанной окружности в $\sqrt{2}$ раз. Найдите угол, противолежащий данной стороне.

4)* Радиус окружности, вписанной в треугольник, равен 8,4 см. Может ли периметр этого треугольника быть равным 50 см?

Задание 11.

ВЕКТОРЫ

11.1. 1) Начертите два неколлинеарных вектора $\vec{k}$ и $\vec{p}$, начала которых не совпадают. Постройте векторы, равные:

а) $\vec{p}-\vec{k}$; б) $\vec{p}+1\frac{1}{2}\vec{k}$.

2) В треугольнике ABC медианы пересекаются в точке O, A_1 — середина отрезка BC.

а) Выразите вектор $\overrightarrow{OA_1}$ через векторы $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$.

б) Возможно ли равенство $x\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{A_1O}$, где x — некоторое число? Если возможно, найдите x.

3)* Точка M лежит на стороне AC треугольника ABC, $\angle ABC=\angle AMB=90°$, $BM=2$, $AM=4$, $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{CM}$. Найдите x.

11.2. 1) Начертите два неколлинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{p}$. Постройте векторы, равные:

а) $-\vec{a}+\vec{p}$;

б) $0{,}5\vec{p}+\vec{a}$.

2) В треугольнике ABC точка M принадлежит стороне AC, причем $AM:MC=1:2$.

а) Выразите вектор $\overrightarrow{BM}$ через векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AC}$.

б) Существует ли такое число x, что выполняется равенство $x\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{CA}$? Ответ обоснуйте.

3)* Точка M принадлежит стороне AC треугольника ABC, $AM=1$, $AB=5$, $\angle ABC=\angle AMB=90°$, $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{CM}$. Найдите x.

11.3. 1) Начертите два неколлинеарных вектора $\vec{x}$ и $\vec{y}$. Постройте векторы, равные:

а) $\vec{x}+\vec{y}$;

б) $\vec{x}-0{,}5\vec{y}$.

2) Точка O — середина стороны HP квадрата $MHPC$.

а) Выразите вектор $\overrightarrow{CO}$ через векторы $\overrightarrow{CM}$ и $\overrightarrow{CP}$.

б) Возможно ли равенство $\overrightarrow{HO}=y\overrightarrow{PH}$? Если возможно, то найдите y.

3)* Точка M лежит на стороне AC треугольника ABC, $\angle ABM=\angle CBM$, $AB=3$, $BC=2$. Выразите вектор $\overrightarrow{MA}$ через вектор $\overrightarrow{MC}$.

11.4. 1) Начертите два неколлинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, отложенные от разных точек. Постройте векторы, равные:

а) $-\vec{a}-\vec{b}$;

б) $0{,}5\vec{a}+\vec{b}$.

2) Точка O принадлежит стороне PK ромба $MHPK$, причем $OP:OK=1:2$.

а) Выразите вектор $\overrightarrow{MO}$ через векторы $\overrightarrow{MH}$ и $\overrightarrow{PH}$.

б) Существует ли такое число x, что выполняется равенство $\overrightarrow{MO}=x\overrightarrow{PK}$? Ответ обоснуйте.

3)* Точка M принадлежит стороне AC треугольника ABC и равноудалена от сторон угла ABC, $AB=4$, $BC=5$. Докажите, что $\overrightarrow{AM}=\frac{4}{5}\overrightarrow{MC}$.

Задание 12

МЕТОД КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ

12.1. 1) Прямая задана уравнением $2y-3x+6=0$. Запишите координаты каких-либо двух точек A и B, принадлежащих данной прямой, и координаты середины отрезка AB.

2) Напишите уравнение окружности с центром $A(-3; 2)$, проходящей через точку $B(0; -2)$.

3) Докажите, что четырехугольник $ABCD$, заданный координатами своих вершин $A(1; 3)$, $B(3; 1)$, $C(6; 4)$, $D(4; 6)$,— прямоугольник.

4)* Определите, имеют ли общие точки линии, заданные уравнениями $(x-3)^2+(y-2)^2=9$ и $(x-9)^2+(y-10)^2=4$.

12.2. 1) Найдите длину медианы, проведенной из вершины P треугольника HPM, если точки M, P, H имеют координаты $(1; 11)$, $(8; 2)$, $(-15; 9)$ соответственно.

2) Установите, принадлежит ли точка $A(1; \sqrt{3})$ окружности с центром $(2; 0)$ и радиусом, равным 2.

3) Докажите, что параллелограмм $ABCD$, заданный координатами своих вершин $A(4; 1)$, $B(0; 4)$, $C(-3; 0)$, $D(1; -3)$, является квадратом.

4)* Определите, сколько общих точек имеют линии

$$(x+4)^2+(y+3)^2=9 \text{ и } (x+1)^2+(y-1)^2=4.$$

12.3. 1) Найдите координаты концов какого-либо отрезка, лежащего на прямой $3y+5x-15=0$, и координаты его середины.

2) Напишите уравнение окружности с центром $A(2; 1)$, проходящей через точку $B(5; 5)$.

3) Докажите, что четырехугольник $ABCD$, заданный координатами своих вершин $A(1; 1)$, $B(4; 2)$, $C(5; 5)$, $D(2; 4)$,— ромб.

4)* Используя метод координат, докажите, что система уравнений

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y-2)^2=4,\\(x-9)^2+(y-8)^2=64\end{cases}$$

имеет только одно решение.

12.4. 1) Вершины треугольника ABC имеют координаты $A(11; 1)$, $B(2; 8)$, $C(9; -15)$. Найдите длину медианы, проведенной из вершины B.

2) Установите, принадлежит ли точка с координатами $(1; 7)$ окружности с центром $(0; 3)$ и радиусом, равным 3.

3) В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Координаты точек A, B, O равны $(1; 1)$, $(-1; 7)$, $(3; 3)$ соответственно. Докажите, что данный параллелограмм является ромбом.

4)* Используя метод координат, докажите, что система уравнений

$$\begin{cases}(x-7)^2+(y-3)^2=16,\\(x-2)^2+(y+9)^2=49\end{cases}$$

не имеет решений.

Задание 13

СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ ТРЕУГОЛЬНИКА

13.1. 1) В треугольнике ABC $\angle A=40°$, $\angle B=35°$, $AC=0{,}57$. С помощью микрокалькулятора вычислите BC.

2) Две стороны треугольника равны 27,4 и 16,3, а угол между ними равен 140°. С помощью микрокалькулятора найдите третью сторону треугольника.

3) Определите вид треугольника, если его стороны равны 11, 12 и 15 см.

4)* В треугольнике ABC $AB=BC$, $\angle BAC=2\alpha$, AE — биссектриса, $BE=a$. Найдите площадь треугольника ABC.

13.2. 1) В треугольнике MHK $MK=12{,}5$, $\angle M=25°$, $\angle K=50°$. С помощью микрокалькулятора вычислите MH.

2) Две стороны треугольника равны 0,72 и 0,61, а угол между ними равен 130°. С помощью микрокалькулятора найдите третью сторону треугольника.

3) Определите вид треугольника, если его стороны равны 12, 16 и 21 см.

4)* В ромбе $ABCD$ AK — биссектриса треугольника BAC, $\angle BAD=4\varphi$, $BK=b$. Найдите площадь ромба.

13.3. 1) В треугольнике ABC $BC=0{,}75$, $\angle B=40°$, $\angle C=25°$. С помощью микрокалькулятора вычислите AC.

2) В треугольнике две стороны равны 12,4 и 15,7, а угол между ними равен 160°. Используя микрокалькулятор, найдите третью сторону треугольника.

3) Определите вид треугольника, если его стороны равны 8, 12 и 14 см.

4)* В равнобедренном треугольнике CDE $(CD=DE)$ $\angle DCE=\varphi$, CM — биссектриса. Найдите площадь треугольника CDM, если $CD=b$.

13.4. 1) В треугольнике MEF $ME=15{,}7$, $\angle M=42°$, $\angle F=37°$. С помощью микрокалькулятора вычислите MF.

2) В треугольнике две стороны равны 0,36 и 0,17, а угол между ними равен 155°. Используя микрокалькулятор, найдите третью сторону треугольника.

3) Определите вид треугольника, если его стороны равны 7, 11 и 14 см.

4)* В ромбе $ABCD$ AP — биссектриса треугольника CAD, $\angle BAD=2\alpha$, $PD=a$. Найдите площадь ромба.

Задание 14

ДЛИНА ОКРУЖНОСТИ И ПЛОЩАДЬ КРУГА

14.1. 1) Найдите площадь круга, вписанного в квадрат с площадью, равной 72 дм^2.
2) Вычислите градусную меру дуги радиуса 10 см, если ее длина равна 5π см.
3) Периметр правильного треугольника, вписанного в окружность, равен 45 см. Найдите длину стороны правильного шестиугольника, вписанного в эту же окружность.
4)* На сторонах правильного восьмиугольника $A_1A_2...A_8$ вне его построены квадраты. Докажите, что многоугольник, образованный вершинами этих квадратов, отличных от A_1, A_2, A_3, ..., A_8, не является правильным.

14.2. 1) Найдите длину окружности, вписанной в правильный шестиугольник со стороной $16\sqrt{3}$ см.
2) Вычислите градусную меру сектора круга радиуса 18 см, если площадь этого сектора 18π см^2.
3) Периметр квадрата, вписанного в окружность, равен 18 см. Найдите сторону правильного треугольника, вписанного в ту же окружность.
4)* На сторонах правильного пятиугольника $ABCDE$ вне его построены квадраты. Докажите, что многоугольник, образованный вершинами этих квадратов, отличных от A, B, C, D, E, не является правильным.

14.3. 1) Найдите площадь квадрата, если площадь вписанного в него круга равна 144π см^2.
2) Вычислите длину дуги радиуса 8 см, если ее градусная мера равна 150°.
3) Длина стороны правильного шестиугольника, вписанного в окружность, равна 7 см. Найдите периметр правильного треугольника, вписанного в ту же окружность.
4)* На сторонах правильного шестиугольника $ABCDET$ вне его построены квадраты. Докажите, что многоугольник, образованный вершинами этих квадратов, отличных от A, B, C, D, E, T, является правильным.

14.4. 1) Длина окружности, вписанной в правильный шестиугольник, равна 12 дм. Найдите площадь шестиугольника.
2) Вычислите площадь кругового сектора, если градусная мера его дуги равна 120°, а радиус круга равен 12 см.
3) Длина стороны правильного треугольника, вписанного в окружность, равна 8 см. Найдите периметр квадрата, вписанного в ту же окружность.
4)* На сторонах правильного девятиугольника $A_1A_2...A_9$ вне его построены квадраты. Докажите, что многоугольник, образованный вершинами этих квадратов, отличных от A_1, A_2, ..., A_9, не является правильным.

Задание 15

ИТОГОВОЕ ПОВТОРЕНИЕ КУРСА ПЛАНИМЕТРИИ

15.1. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C=90°$) CD — высота, $AC=3$ см, $CD=2{,}4$ см.

1) Найдите AD.

2) Найдите $\sin A$ и $\operatorname{tg} DCA$.

3) Докажите подобие треугольников ABC и ADC, найдите неизвестные стороны треугольника ABC и его площадь.

4) Выразите вектор $\overrightarrow{CD}$ через векторы $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{BA}$.

5) С помощью циркуля и линейки постройте окружность, описанную около треугольника ABC, и найдите площадь круга.

6)* Введите систему координат так, чтобы точка C была началом координат, а точка A принадлежала оси абсцисс. Запишите уравнение окружности, вписанной в треугольник ABC, в этой системе координат. (Рассмотрите любой из возможных случаев.)

15.2. В параллелограмме $ABCD$ $AB=6$ см, $AD=8$ см и $\angle BAD=60°$.

1) Найдите длину высоты BK, проведенной из вершины B к стороне AD, и площадь параллелограмма.

2) Найдите длину большей диагонали параллелограмма.

3) Определите вид треугольника ECD, если точка E принадлежит стороне BC и луч DE — биссектриса угла ADC.

4) Выразите вектор $\overrightarrow{DE}$ через векторы $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{CB}$.

5) С помощью циркуля и линейки постройте высоту из вершины B к стороне CD.

6)* Введите систему координат так, чтобы точка K была началом координат, а точка A принадлежала оси абсцисс. Запишите уравнение окружности, описанной около треугольника KAD, в этой системе координат. (Рассмотрите любой из возможных случаев.)

15.3. В равнобедренной трапеции $ABCD$ основания AD и BC соответственно равны 10 и 6 см, $\angle A=30°$.

1) Найдите высоту BE и площадь трапеции.

2) Докажите подобие треугольников AOD и BOC и найдите отношение их периметров, если O — точка пересечения диагоналей трапеции.

3) Найдите площадь треугольника ACD.

4) Выразите вектор $\overrightarrow{BE}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.

5) При помощи циркуля и линейки постройте среднюю линию трапеции $ABCD$.

6)* Введите систему координат так, чтобы точка E была началом координат, а точка B принадлежала оси ординат. Запишите уравнение окружности, описанной около треугольника ABE в этой системе координат. (Рассмотрите любой из возможных случаев.)

15.4. В равнобедренном треугольнике ABC $AB=BC=5$ см, $AC=6$ см, BD и AK — высоты.

1) Найдите BD и площадь треугольника ABC.

2) Найдите $\cos BAC$ и $\operatorname{tg} ABD$.

3) Докажите, что треугольники AKC и BDC подобны, и найдите длину CK.

4) Выразите вектор $\overrightarrow{AK}$ через векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CB}$.

5) С помощью циркуля и линейки постройте окружность, вписанную в треугольник ABC, и найдите ее длину. (Чертеж к задаче можно повторить заново.)

6)* Введите систему координат так, чтобы точка D была началом координат, а точка B принадлежала оси ординат. Запишите уравнение прямой AB в этой системе координат. (Рассмотрите любой из возможных случаев.)

Задание 16

ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ В ПРОСТРАНСТВЕ. ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

16.1. 1) Даны трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC и точка M, не лежащая в плоскости этой трапеции. Докажите, что прямая AD параллельна плоскости треугольника BMC.

2) Прямая MK, не лежащая в плоскости ABC, параллельна стороне AB параллелограмма $ABCD$. Выясните взаимное расположение прямых MK и AD и найдите угол между ними, если угол ADC равен 130°.

3)* Точка M не лежит ни на одной из двух скрещивающихся прямых. Докажите, что через эту точку проходит плоскость, параллельная каждой из этих прямых, и притом только одна.

16.2. 1) Даны прямоугольник $ABCD$ и точка M, не лежащая в плоскости этого прямоугольника. Докажите, что прямая CD параллельна плоскости ABM.

2) Прямая KM параллельна стороне AB треугольника ABC и не лежит в его плоскости. Выясните взаимное расположение прямых MK и AC и найдите угол между ними, если угол BAC равен 145°.

3)* Прямая a параллельна некоторой плоскости. Докажите, что в этой плоскости можно провести прямую, параллельную прямой a. Сколько таких прямых можно провести?

16.3. 1) Середины сторон CK и EK треугольника CEK лежат в плоскости α, а сторона CE не лежит в этой плоскости. Докажите, что прямая CE параллельна плоскости α.

2) Прямая p, не лежащая в плоскости ABC, параллельна

основанию AD трапеции $ABCD$. Выясните взаимное расположение прямых p и CD и найдите угол между ними, если угол BCD равен 125°.

3)* Прямая a и параллельная ей плоскость α не проходят через точку M. Докажите, что через точку M проходит прямая, параллельная прямой a и плоскости α, и притом только одна.

16.4. 1) Точки M и H — середины боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$. Точка P не лежит в плоскости этой трапеции. Докажите, что прямая BC параллельна плоскости MPH.

2) Прямая p не лежит в плоскости ABC и параллельна прямой AB. Выясните взаимное расположение прямых p и BC и найдите угол между ними, если угол ABC равен 115°.

3)* Даны точки A, B, C, D, не лежащие в одной плоскости. Докажите, что через точку D проходит хотя бы одна прямая, параллельная плоскости ABC и скрещивающаяся с прямой AB.

Задание 17

ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ

17.1. 1) В тетраэдре $ABCD$ точки M, K и P являются серединами ребер AB, BC и BD. Докажите, что плоскость MKP параллельна плоскости ADC. Вычислите площадь треугольника MKP, если площадь треугольника ADC равна 48 см^2.

2) Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка M лежит в плоскости грани ABB_1A_1, и $M \in AB$. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точку M и параллельной плоскости ABC.

3) Дан параллелограмм $ABCD$. Точка E не лежит в плоскости BCD. Можно ли через прямую EA и точки B и C провести плоскость?

4)* Точка P лежит на ребре AB параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точку P и параллельной плоскости A_1D_1C.

17.2. 1) В тетраэдре $DABC$ точки K, E и M являются серединами ребер AC, DC, BC. Докажите, что плоскость KEM параллельна плоскости ADB. Вычислите площадь треугольника ADB, если площадь треугольника KEM равна 27 см^2.

2) Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка P лежит в плоскости грани BCC_1B_1 и не принадлежит ребру CC_1. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точку P и параллельной плоскости C_1CD.

3) Даны ромб $ABCD$ и точка F, не лежащая в плоскости ACD. Как расположены прямая BD и плоскость ACF?

4)* Точка M лежит на ребре AA_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точку M и параллельной плоскости B_1C_1D.

17.3. 1) В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка M — середина ребра AA_1. Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через точку M параллельно плоскости AB_1D_1, если площадь треугольника AB_1D_1 равна 56 см^2.

2) В тетраэдре $DABC$ точки M, P, K — середины ребер AD, BD и BC соответственно. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью MPK.

3) В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки M и K — середины ребер AB и CC_1 соответственно. Можно ли провести плоскость через точки K, C_1, M и точку пересечения диагоналей грани AA_1B_1B?

4)* В тетраэдре $DABC$ DD_1 — медиана грани ABD. Точки E и P — середины отрезков BC и DD_1 соответственно. Точка K принадлежит ребру DC, причем $DK:KC=4:1$. Постройте сечение тетраэдра плоскостью PKE.

17.4. 1) В тетраэдре $DABC$ точка M — середина ребра AD. Определите площадь грани DBC, если площадь сечения тетраэдра плоскостью, проходящей через точку M параллельно этой грани, равна 31 см^2.

2) В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки M, H и P — середины ребер B_1C_1, CC_1 и DD_1 соответственно. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью MPH.

3) В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка E — середина ребра AB. Определите взаимное расположение прямой AB_1 и плоскости CC_1E.

4)* В тетраэдре $DABC$ M — точка пересечения медиан грани ABD, K — середина ребра DC, точка E лежит на ребре AC, $AE:EC=1:4$. Постройте сечение тетраэдра плоскостью KME.

Задание 18

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ

18.1. 1) Через вершину K треугольника DKP проведена прямая KM, перпендикулярная плоскости этого треугольника. Известно, что $KM=15$ см, $DP=12$ см, $DK=PK=10$ см. Найдите расстояние от точки M до прямой DP.

2) Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите двугранный угол B_1ADB, если известно, что четырехугольник $ABCD$ — квадрат, $AC=6\sqrt{2}$ см, $AB_1=4\sqrt{3}$ см.

3)* Дан прямоугольный параллелепипед, угол между прямыми A_1C и BD прямой. Определите вид четырехугольника $ABCD$.

18.2. 1) Через вершину прямого угла C равнобедренного треугольника CDE проведена прямая CP, перпендикулярная к его плоскости. Найдите расстояние от точки P до прямой DE, если $CP=8$ см, $CE=15\sqrt{2}$ см.

2) Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите двугранный угол $ADCA_1$, если $AC=13$ см, $DC=5$ см, $AA_1=12\sqrt{3}$ см.

3)* Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между прямыми B_1C и AC_1.

18.3. 1) Через вершину K треугольника KMP проведена прямая KE, перпендикулярная плоскости этого треугольника. Расстояние от точки E до прямой MP равно $2\sqrt{41}$ см. Найдите KM, если $KE=8$ см, $MP=2\sqrt{21}$ см, $MK=KP$.

2) Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите двугранный угол C_1ADB, если $BD=6\sqrt{2}$ см, $AD=6$ см, $AA_1=2\sqrt{3}$ см.

3)* Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между прямыми A_1C и BD.

18.4. 1) Через вершину прямого угла равнобедренного треугольника MHK проведена прямая MP, перпендикулярная его плоскости. Расстояние от точки P до прямой HK равно 13 см, $MH=5\sqrt{2}$ см. Найдите PM.

2) Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите двугранный угол C_1ADC, если $AC=25$ см, $AD=4\sqrt{21}$ см, $AA_1=17$ см.

3)* Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, угол между прямыми B_1C и DC_1 равен 60°, $B_1C=DC_1$. Определите вид четырехугольника BB_1C_1C.

Задание 19.

МНОГОГРАННИКИ

19.1. 1) Основанием прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является параллелограмм $ABCD$ со сторонами 4 и 8 см, $\angle BAD=60°$. Диагональ B_1D призмы образует с плоскостью основания угол 30°. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

2) Высота основания правильной треугольной пирамиды равна 5 см, а двугранный угол при стороне основания равен 45°.

а) Найдите площадь поверхности пирамиды.

б)* Найдите расстояние от вершины основания до противоположной боковой грани.

19.2. 1) Основанием прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является параллелограмм со сторонами $2\sqrt{2}$ и 2 см, $\angle ADC=135°$.

Диагональ A_1C призмы образует с плоскостью основания угол 60°. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

2) Диагональ основания правильной четырехугольной пирамиды равна $4\sqrt{2}$ см, а двугранный угол при стороне основания равен 60°.

а) Найдите площадь поверхности пирамиды.

б)* Найдите расстояние от центра основания до боковой грани.

19.3. 1) Основанием прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является параллелограмм $ABCD$ со сторонами 6 и 3 см и углом B, равным 60°. Диагональ AC_1 призмы образует с плоскостью основания угол 60°. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

2) Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 3 см, а двугранный угол при стороне основания равен 45°.

а) Найдите площадь поверхности пирамиды.

б)* Найдите расстояние от вершины основания до противоположной боковой грани.

19.4. 1) Основанием прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является параллелограмм $ABCD$ со сторонами $2\sqrt{3}$ и 2 см, $\angle BCD = 150°$. Диагональ BD_1 составляет с плоскостью основания угол 45°. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

2) Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 4 см, а двугранный угол при стороне основания равен 30°.

а) Найдите площадь поверхности пирамиды.

б)* Найдите расстояние от центра основания до боковой грани.

Задание 20

ВЕКТОРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

20.1. 1) Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Назовите один из векторов, начало и конец которого являются вершинами параллелепипеда, равный:

а) $\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{CD}$; б) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CC_1}$.

2) Дан тетраэдр $ABCD$. Точка M — середина ребра BC, точка N — середина отрезка DM. Выразите вектор $\overrightarrow{AN}$ через векторы $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{d} = \overrightarrow{AD}$.

3) Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Медианы треугольника ABD пересекаются в точке P. Разложите вектор $\overrightarrow{B_1P}$ по векторам $\vec{a} = \overrightarrow{B_1A_1}$, $\vec{b} = \overrightarrow{B_1C_1}$, $\vec{c} = \overrightarrow{B_1B}$.

4)* Известно, что $\overrightarrow{OM}=0{,}1\overrightarrow{OA}+0{,}2\overrightarrow{OB}+0{,}7\overrightarrow{OC}$. Докажите, что точки A, B, C и M лежат в одной плоскости.

20.2. 1) Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Назовите один из векторов, начало и конец которого являются вершинами параллелепипеда, равный:

а) $\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1A}$; б) $\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{BB_1}$.

2) Дан тетраэдр $ABCD$. Медианы треугольника BDC пересекаются в точке M, точка K — середина отрезка AM. Выразите вектор $\overrightarrow{BK}$ через векторы $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{AC}$, $\vec{d}=\overrightarrow{AD}$.

3) Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Диагонали параллелограмма $A_1B_1C_1D_1$ пересекаются в точке O_1. Разложите вектор $\overrightarrow{AO_1}$ по векторам $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AD}$, $\vec{c}=\overrightarrow{AA_1}$.

4)* Известно, что $\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OA}+0{,}5\overrightarrow{OB}-1{,}5\overrightarrow{OC}$. Докажите, что точки A, B, C и D лежат в одной плоскости.

20.3. 1) Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Назовите один из векторов, начало и конец которого являются вершинами параллелепипеда, равный:

а) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{C_1D_1}+\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{D_1A_1}$; б) $\overrightarrow{D_1C_1}-\overrightarrow{A_1B}$.

2) Дан тетраэдр $ABCD$. Точка K — середина медианы DM треугольника ADC. Выразите вектор $\overrightarrow{BK}$ через векторы $\vec{a}=\overrightarrow{BA}$, $\vec{c}=\overrightarrow{BC}$, $\vec{d}=\overrightarrow{BD}$.

3) Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Медианы треугольника ACD_1 пересекаются в точке M. Выразите вектор $\overrightarrow{BM}$ через векторы $\overrightarrow{BA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BB_1}=\vec{b}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{c}$.

4)* Известно, что $\overrightarrow{OA}=0{,}1\overrightarrow{OM}+0{,}5\overrightarrow{OB}+0{,}4\overrightarrow{OC}$. Докажите, что точки A, B, C и M лежат в одной плоскости.

20.4. 1) Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Назовите один из векторов, начало и конец которого являются вершинами параллелепипеда, равный:

а) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{D_1D}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}$; б) $\overrightarrow{A_1D_1}-\overrightarrow{C_1C}$.

2) Дан тетраэдр $ABCD$. Медианы треугольника ABC пересекаются в точке K, точка M — середина отрезка DK. Выразите вектор $\overrightarrow{AM}$ через векторы $\overrightarrow{DA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{DB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{DC}=\vec{c}$.

3) Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точка O — середина отрезка B_1C. Выразите вектор $\overrightarrow{AO}$ через векторы $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{d}$, $\overrightarrow{AA_1}=\vec{a}$.

4)* Известно, что $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}+2{,}5\overrightarrow{OD}-2{,}5\overrightarrow{OB}$. Докажите, что точки A, B, C и D лежат в одной плоскости.

Задание 21

МЕТОД КООРДИНАТ В ПРОСТРАНСТВЕ

21.1. 1) Даны точки $P(1;\ 0;\ 2)$, $H(1;\ \sqrt{3};\ 3)$, $K(-1;\ 0;\ 3)$, $M(-1;\ -1;\ 3)$. Найдите угол между векторами $\overrightarrow{PH}$ и $\overrightarrow{KM}$.

2) Найдите скалярное произведение $\vec{b}(\vec{a}-2\vec{b})$, если $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=4$, угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен $135°$.

3) Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна $2a$, точка P — середина отрезка BC. Найдите:

а) расстояние между серединами отрезков B_1D и AP;
б) угол между прямыми B_1D и AP.

4)* Дан вектор $\vec{a}\{0;\ 2;\ 0\}$. Найдите множество точек M, для которых $\overrightarrow{OM}\cdot\vec{a}=0$, если O — начало координат.

21.2. 1) Даны точки $A(2;\ -1;\ \sqrt{2})$, $C(1;\ -2;\ 0)$, $B(1;\ -3;\ 0)$, $D(2;\ -2;\ 0)$. Найдите угол между векторами $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{DB}$.

2) Длины векторов $\vec{m}$ и $\vec{n}$ равны 3 и 2, угол между ними равен $150°$. Найдите скалярное произведение $\vec{n}(\vec{m}+\vec{n})$.

3) Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна $4b$, точка E — середина отрезка B_1B. Найдите:

а) расстояние между серединами отрезков AE и BD_1;
б) угол между прямыми AE и BD_1.

4)* Даны векторы $\vec{a}\{7;\ 0;\ 0\}$ и $\vec{b}\{0;\ 0;\ 3\}$.
Найдите множество точек M, для каждой из которых выполняются условия $\overrightarrow{OM}\cdot\vec{a}=0$ и $\overrightarrow{OM}\cdot\vec{b}=0$, если O — начало координат.

21.3. 1) Даны точки $E(2;\ 0;\ 1)$, $M(3;\ \sqrt{3};\ 1)$, $F(3;\ 0;\ -1)$, $K(3;\ -1;\ -1)$. Найдите угол между векторами $\overrightarrow{EM}$ и $\overrightarrow{FK}$.

2) Угол между векторами $\vec{c}$ и $\vec{d}$ равен $120°$, $|\vec{c}|=3$, $|\vec{d}|=5$. Найдите скалярное произведение $(\vec{c}-\vec{d})\cdot\vec{d}$.

3) Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром, равным $4c$, точка F — середина отрезка DC. Найдите:

а) расстояние между серединами отрезков A_1C и AF;
б) угол между прямыми A_1C и AF.

4)* Дан вектор $\vec{c}\{0;\ 0;\ -5\}$. Найдите множество точек P, для которых выполняется условие $\vec{c}\cdot\overrightarrow{OP}=0$, если O — начало координат.

21.4. 1) Даны точки $K(0;\ -2;\ 1)$, $E(\sqrt{2};\ -1;\ 2)$, $D(0;\ -2;\ 2)$, $P(0;\ -3;\ 1)$. Найдите угол между векторами $\overrightarrow{KE}$ и $\overrightarrow{PD}$.

2) Длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{p}$ равны соответственно 4 и 3, угол между ними равен $150°$. Найдите скалярное произведение $(\vec{p}-\vec{a})\vec{a}$.

3) Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна $2c$, точка M — середина ребра B_1C_1. Найдите:

а) расстояние между серединами отрезков A_1M и BD_1;
б) угол между прямыми A_1M и BD_1.

4)* Даны векторы $\vec{c}\{0; -2; 0\}$ и $\vec{b}\{0; 0; 5\}$. Найдите множество точек E, для каждой из которых выполняются условия $\overrightarrow{OE}\cdot\vec{b}=0$, $\overrightarrow{OE}\cdot\vec{c}=0$, если O — начало координат.

Задание 22

ЦИЛИНДР. КОНУС. ШАР

22.1. 1) Все стороны квадрата с диагональю, равной $8\sqrt{2}$ см, касаются шара. Найдите расстояние от центра шара до плоскости квадрата, если радиус шара равен 5 см.

2) Через вершину конуса проведена плоскость, пересекающая основание по хорде, стягивающей дугу в 90°. Найдите площадь поверхности конуса, если его образующая равна L, а угол в сечении при вершине конуса равен 60°.

3)* В задаче 2 найдите расстояние от центра основания до плоскости сечения.

22.2. 1) Все стороны равностороннего треугольника касаются шара, радиус шара равен 5 см, а сторона треугольника $6\sqrt{3}$ см. Найдите расстояние от центра шара до плоскости треугольника.

2) Цилиндр пересечен плоскостью, параллельной оси, так, что в сечении получился квадрат с диагональю, равной $a\sqrt{2}$ см. Сечение отсекает от окружности основания дугу в 60°. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.
3)* В задаче 2 найдите расстояние от оси цилиндра до диагонали сечения.

22.3. 1) Все вершины квадрата со стороной, равной $3\sqrt{2}$ см, лежат на сфере. Расстояние от центра сферы до плоскости квадрата равно 4 см. Найдите радиус сферы.

2) Через вершину конуса проведена плоскость, отсекающая от окружности основания ее четверть. Найдите площадь полной поверхности конуса, если радиус основания равен R, а угол в сечении при вершине конуса равен 60°.
3)* В задаче 2 найдите расстояние от центра основания до плоскости сечения.

22.4. 1) Вершины равностороннего треугольника со стороной $4\sqrt{3}$ см принадлежат сфере. Расстояние от центра сферы до плоскости треугольника равно 3 см. Найдите радиус сферы.
2) Цилиндр пересечен плоскостью, параллельной оси. Диагональ сечения вдвое больше радиуса основания, равного R. Найдите площадь полной поверхности цилиндра, если сечение отсекает от окружности основания ее четверть.
3)* В задаче 2 найдите расстояние от оси цилиндра до диагонали сечения.

Задание 23

ОБЪЕМЫ ТЕЛ

23.1. 1) В правильной треугольной пирамиде боковые ребра наклонены к основанию под углом 60°, длина бокового ребра 8 см. Найдите объем пирамиды.

2) В конусе через его вершину под углом φ к плоскости основания проведена плоскость, отсекающая от окружности основания дугу в 2α. Радиус основания конуса равен R. Найдите объем конуса.

3)* В пирамиде, данной в задаче 1, найдите расстояние между ребрами, лежащими на скрещивающихся прямых.

23.2. 1) В правильной четырехугольной пирамиде боковые ребра наклонены к основанию под углом 60°, длина бокового ребра равна 10 см. Найдите объем пирамиды.

2) В цилиндре проведена плоскость, параллельная его оси, которая отсекает от окружности основания дугу в 2α. Диагональ полученного сечения составляет с осью цилиндра угол φ и удалена от нее на расстояние, равное d. Найдите объем цилиндра.

3)* В пирамиде, данной в задаче 1, найдите расстояние от диагонали основания до скрещивающегося с ней бокового ребра.

23.3. 1) В правильной треугольной пирамиде плоский угол при вершине равен 60°, длина бокового ребра равна 4 см. Найдите объем пирамиды.

2) В конусе через его вершину под углом φ к плоскости основания проведена плоскость, отсекающая от окружности основания дугу α. Высота конуса равна h. Найдите объем конуса.

3)* В пирамиде, данной в задаче 1, найдите расстояние между ее скрещивающимися ребрами.

23.4. 1) В правильной четырехугольной пирамиде плоский угол при вершине равен 60°, длина бокового ребра равна 8 см. Найдите объем пирамиды.

2) В цилиндре проведена плоскость, параллельная его оси, которая отсекает от окружности основания дугу φ. Диагональ полученного сечения равна $2m$ и удалена от оси цилиндра на расстояние, равное m. Найдите объем цилиндра.

3)* В пирамиде, данной в задаче 1, найдите расстояние от диагонали основания до скрещивающегося с ней бокового ребра.

Задание 24.

ИТОГОВОЕ ПОВТОРЕНИЕ КУРСА СТЕРЕОМЕТРИИ

24.1. В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$ сторона основания равна 6, а боковое ребро 5. Найдите:
1) площадь боковой поверхности пирамиды;
2) объем пирамиды;
3) угол наклона боковой грани к плоскости основания;
4) скалярное произведение векторов $(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB})\cdot\overrightarrow{AM}$;
5) площадь описанной около пирамиды сферы;
6)* угол между BD и плоскостью DMC.

24.2. В правильной треугольной пирамиде $MABC$ сторона основания равна $4\sqrt{3}$, а боковое ребро 5. Найдите:
1) площадь боковой поверхности пирамиды;
2) объем пирамиды;
3) угол между боковым ребром и плоскостью основания;
4) скалярное произведение векторов $\frac{1}{2}(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})\cdot\overrightarrow{EA}$, где E — середина BC;
5) объем вписанного в пирамиду шара;
6)* угол между стороной основания и плоскостью боковой грани.

24.3. В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$ боковое ребро равно 8 и наклонено к плоскости основания под углом 60°. Найдите:
1) площадь боковой поверхности пирамиды;
2) объем пирамиды;
3) угол между противоположными боковыми гранями;
4) скалярное произведение векторов $\frac{1}{2}(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC})\cdot\overrightarrow{ME}$, где E — середина DC;
5) объем описанного около пирамиды шара;
6)* угол между боковым ребром AM и плоскостью DMC.

24.4. В правильной треугольной пирамиде $MABC$ сторона основания равна $2\sqrt{3}$, а боковые грани наклонены к основанию под углом 60°. Найдите:
1) площадь боковой поверхности пирамиды;
2) объем пирамиды;
3) угол между боковым ребром и плоскостью основания;
4) скалярное произведение векторов $\frac{1}{2}(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MB})\cdot\overrightarrow{OM}$, где O — основание высоты пирамиды;
5) площадь вписанной в пирамиду сферы;
6) угол между ME, где E — середина BC, и плоскостью AMC.

1.1. 2) а) KD, KC, KM; б) DK, KC, DC, KM.

1.2. 2) а) CA, CB, CF; б) AC, CB, AB, CF.

1.3. 1) Одну или три (см. рис. 263). 2) а) MA, MB, MC, MD, AM, AK; б) KM, AM, MB, KB, AB, MC, MD.

1.4. 1) а) См. рис. 264, *а*; б) см. рис. 264, *б*. 2) KC, KN, KE, KF, DK, DN; б) KC, KD, KN, CD, CN, KE, KF.

1.5. 1) Одну, четыре или шесть (см. рис. 265). 2) 15.

1.6. 1) Ни одной, одну, две или три (см. рис. 266). 2) 15.

2.1. 1) 12 см или 2 см. 2) 37,9 дм.

2.2. 1) 20 см или 4 см. 2) 0,624 м.

2.3. 1) Не является. 2) 4,3 дм.

2.4. 1) Не является. 2) 5 дм.

2.5. 1) Точка M не может принадлежать отрезку AB, так как $AM+MB \neq AB$, она расположена на прямой a или правее точки B, или левее точки A. Пусть для первого случая $MB=x$, тогда, учитывая условие, имеем $x+6+x=9$, т. е. $x=1{,}5$. Тогда $MB=1{,}5$, $MA=7{,}5$. Аналогично рассматривается второй случай. Окончательно имеем $MA=7{,}5$ см, $MB=1{,}5$ см или $MA=1{,}5$ см, $MB=7{,}5$ см.

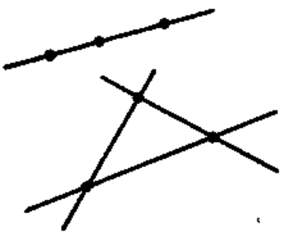

Рис. 263

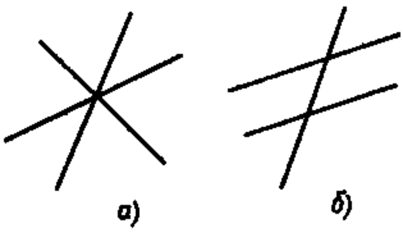

Рис. 264

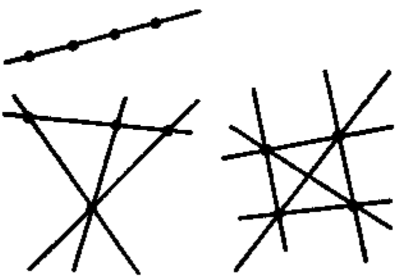

Рис. 265

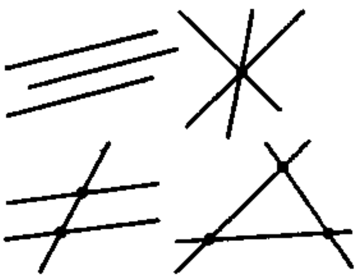

Рис. 266

2) AC и BD.

2.6. 1) $AE=3$ см, $AF=11$ см или $AE=11$ см, $AF=3$ см. Указание. Задача решается аналогично задаче 2.5 (1).

2) AB и CD.

2.7. Точка X не может находиться на прямой AB вне отрезка AB. Пусть точка X принадлежит отрезку AB и лежит между точками M и C. Обозначим $AX=y$. Тогда, учитывая условие, имеем $y+8-y+y-4=9$, т. е. $y=5$. Следовательно, расстояние от точки X до точки M равно 1 и точка X лежит правее точки M. Если же точка X лежит левее точки M, то, аналогично рассуждая, получим еще одну точку, удовлетворяющую условию задачи.

2.8. На прямой AB, вне отрезка AB, на расстоянии 1 от его концов (две точки). Указание. Задача решается аналогично задаче 2.7.

3.1. 1) Три развернутых и четыре прямых угла. 2) 41° и 49°.

3.2. 1) Три развернутых и четыре прямых угла. 2) 18° и 72°.

3.3. 1) Четыре тупых угла, один развернутый, один прямой, четыре острых. 2) а) 45° и 79°; б) 17°.

3.4. 1) Один развернутый угол, один прямой, четыре острых и четыре тупых угла. 2) а) 41° и 123°; б) 41°.

3.5. 1) Два прямых, один развернутый, три острых и четыре тупых угла; $\angle AOB$, $\angle COB$, $\angle EOB$, $\angle DOB$. 2) 165°.

3.6. 1) Один развернутый угол, два прямых, четыре острых и три тупых угла; $\angle BOC$, $\angle DOC$, $\angle AOC$, $\angle EOC$. 2) 150°.

3.7. 45°. **3.8.** 54°; 36°.

4.1. 1) 115°; 65°. 2) а) 70°; б) $\angle AOD$ и $\angle FOC$ или $\angle COE$ и $\angle DOB$.

4.2. 1) 135°; 45°. 2) а) 30°; б) $\angle EOC$ и $\angle FOB$ или $\angle AOC$ и $\angle DOC$.

4.3. 1) 117°; 63°. 2) а) Нет; б) 1.

4.4. 1) 36°, 144°. 2) а) Нет; б) 0°.

4.5. 1) Да. 2) 97°30′.

4.6. 1) Да. 2) 142°30′.

4.7. 40°, 140°, 40°, 140°. **4.8.** 80°, 100°, 80°, 100°.

5.3. а) 70°18′, 17 дм; б) нет. **5.4.** а) 16 дм, 121°15′; б) нет.

5.5. а) 5 м, 15°; б) нет. **5.6.** а) 8 м, 60°; б) нет.

6.5. 2) 10,7 дм. **6.6.** 2) 37°40′.

6.7. Пусть прямые, на которых лежат высоты треугольника, CF и BE пересекаются в точке H. Тогда AH — прямая, которой принадлежит третья высота. Обозначим точку пересечения этой прямой с прямой CB через X. В таком случае AX — искомая высота. Из равенства треугольников AXC и BEC следует, что $BC=17$ дм. **6.8.** 27°.

7.1. 2) 17°; 34°; 18 см. **7.2.** 2) 21°; 90°; 9 см.

7.5. 2) $\triangle ABD=\triangle ACD$, так как $AB=AC$, $DB=DC$ и $\angle ABD=\angle ACD$. Из этого следует, что $\angle BAO=\angle CAO$, т. е.

AO — биссектриса равнобедренного треугольника ABC. Отсюда имеем, что $AD \perp BC$.

7.6. 2) Указание. Задача решается аналогично задаче 7.5 (2).

8.1. 2) 27°. **8.2.** 2) 19°. **8.3.** 1) 43°. **8.4.** 1) 59°.

8.5. 1) Треугольник AKB равнобедренный, поэтому $\angle KAB = \angle KBA$. Так как $\angle DAB = \angle ABC$, то и $\angle DAK = \angle CBK$. Следовательно, треугольники DAK и CBK равны ($\angle DAK = \angle CBK$, $\angle AKD = \angle BKC$ как вертикальные, и $AK = BK$). Из равенства этих треугольников вытекает, что $\angle ADB = \angle BCA$.

2) $\triangle ADB = \triangle ACB$ по трем сторонам. Отсюда следует, что $\angle DAB = \angle CAB$, т. е. AB — биссектриса угла DAC.

8.7. 1) Исходя из условия, точки D и C расположены соответственно между точками A и B, A и E. $\triangle ACB = \triangle ADE$, так как $AB = AE$, $AD = AC$ и $\angle A$ общий. Тогда $BC = ED$. Кроме того, из равенства этих треугольников вытекает, что $\angle ABC = \angle AED$ и $\angle ADE = \angle ACB$. Используя последнее равенство, можно получить, что $\angle BDE = \angle BCE$. Тогда $\triangle DKB = \triangle CKE$ по второму признаку равенства треугольников. Отсюда следует, что $KB = KE$.

2) Так как треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ с основаниями AC и A_1C_1 равнобедренные и $AB = A_1B_1$, то $AB = A_1B_1 = BC = B_1C_1$. По условию AM и A_1M_1 — медианы этих треугольников, тогда $BM = B_1M_1$. $\triangle ABM = \triangle A_1B_1M_1$ по третьему признаку равенства треугольников. Тогда $\angle B = \angle B_1$. В таком случае $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ по первому признаку равенства треугольников.

9.5. 1) $\triangle AOB = \triangle DOE$ по третьему признаку равенства треугольников. Тогда $\angle AOB = \angle DOE$. Равенство не нарушится, если к обеим его частям прибавить величину угла BOD. Следовательно, $\angle AOD = \angle BOE$.

9.6. 1) Указание. Из равенства углов POC и EOT вытекает равенство углов POE и COT. Дальнейшее доказательство очевидно.

10.6. 1) Указание. Постройте прямой угол и его биссектрису. Тогда угол, смежный с одним из образовавшихся углов, будет равен 135°.

11.5. 2) $\triangle ABC = \triangle MNK$ по первому признаку равенства треугольников. Тогда $\angle BAC = \angle NMK$. AB и MN параллельны, так как соответственные углы при двух прямых AB и MN и секущей AK равны.

12.1. 2) Пусть AK параллельна прямой BC (точка K находится по ту же сторону от прямой AC, что и точка B). Тогда $KA \perp AC$ и $\angle KAB = 90° - 43° = 47°$, $\angle B = \angle KAB = 47°$ как накрест лежащие углы при параллельных прямых AK и BC и секущей AB.

12.3. 2) Так как BM — биссектриса $\angle ABC$, то $\angle ABM = \angle MBC = 38°$, $\angle AMB = \angle MBC = 38°$ как накрест лежащие углы при двух параллельных прямых AM и BC и секущей BM. $\angle BAM = 180° - \angle ABC = 104°$ как односторонние углы при тех же параллельных прямых и секущей BA.

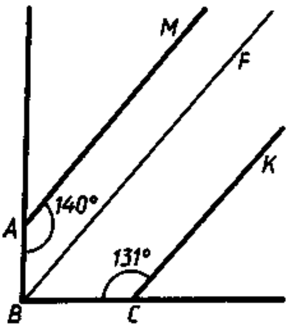

Рис. 267

12.5. 2) Через вершину B проведем луч BF параллельно лучам AM и CK (рис. 267). $\angle ABF = 180° - 140° = 40°$; $\angle FBC = 180° - 131° = 49°$; $\angle ABC = \angle ABF + \angle FBC = 89°$.

12.6. 2) $46°$. Указание. Через вершину угла O провести прямую, параллельную лучам MT и PK.

12.7. По условию $AB = BC$. Значит, $\triangle ABC$ равнобедренный и $\angle A = \angle C = 80°$. Тогда $\angle EAD = 80° - 40° = 40°$. Так как $AE = ED$, то $\triangle AED$ равнобедренный и $\angle EAD = \angle EDA = 40°$. $ED \parallel AC$, так как накрест лежащие углы EDA и DAC при прямых ED и AC и секущей AD равны. $\angle BED = \angle BAC = 80°$ как соответственные углы при параллельных прямых ED и AC и секущей AB.

12.8. $15°$. Указание. Решение аналогично задаче 12.7.

13.1. 2) $53°$. **13.2.** 2) $88°$. **13.3.** 2) $102°$. **13.4.** 2) $77°$.

13.5. 1) Указание. Постройте лучи A_1M и A_1N параллельно соответственно лучам AB и AC и пересекающие сторону BC На них отложите отрезки $A_1B_1 = AB$ и $A_1C_1 = AC$, B_1 и C_1 соедините. Теперь докажите: $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle ABC$ и $B_1C_1 \parallel BC$.

2) Исходя из того, что $\angle 1 = 51°$ и $\angle 2 = 129°$, можно доказать, что $AD \parallel BC$. $\angle 3$ и $\angle EBC$ — накрест лежащие при этих параллельных прямых BC и AD и секущей BE. Поэтому $\angle EBC = \angle 3 = 52°$. Так как BE — биссектриса $\angle ABC$, то $\angle ABC = 104°$. Отсюда следует, что $\angle 4 = 76°$.

13.6. 2) $34°$. Указание. Решение аналогично задаче 13.5.

13.7*. Через точку C проведем луч CF, который параллелен лучам AD и BE и расположен с ними по одну сторону от AB. Так как $AD = AC$, то треугольник ADC равнобедренный и $\angle ADC = \angle ACD$. Кроме того, $\angle ADC = \angle DCF$ как накрест лежащие углы при параллельных прямых AD и CF и секущей DC. Следовательно, CD — биссектриса угла ACF. Аналогично доказывается, что CE — биссектриса угла FCB. $\angle ACF + \angle FCB = 180°$, $2\angle DCF + 2\angle FCE = 180°$, отсюда $\angle DCF + \angle FCE = 90°$, т. е. $\angle DCE = 90°$ и $DC \perp CE$.

13.8*. Точку O соединим отрезками с вершинами A и C. Так как $AD = DO$, то треугольник ADO равнобедренный и $\angle DAO = \angle DOA$. Кроме того, $\angle DOA = \angle OAC$ как накрест лежащие при параллельных прямых DE и AC и секущей AO. Отсюда вытекает, что AO — биссектриса угла BAC. Аналогично доказывается, что CO — биссектриса угла BCA. Мы получим, что точка O — точка пересечения биссектрис треугольника. Значит, BO — биссектриса угла ABC.

14.5. 1) $\angle BAO + \angle ABO = \angle BOK = 70°$. Так как AK и BM — биссектрисы треугольника, то $\angle A + \angle B = 140°$, $\angle C = 40°$.

2) Так как сумма внешних углов при вершине A равна 160°, то каждый внешний угол равен 80°, а потому сам угол A равен 100°. Учитывая, что AD — биссектриса угла BAC, получаем, что $\angle DAC = 50°$, $\triangle ADC$ равнобедренный и $\angle C = \angle DAC = 50°$.

14.6. 1) $\triangle ABK$ прямоугольный, и $\angle B = 60°$, отсюда следует, что $\angle BAK = 30°$. Аналогично из треугольника ABM находим, что $\angle ABO = 18°$. В треугольнике AOB известны два угла, равные 30° и 18°. Тогда $\angle AOB = 132°$.

14.7. $\angle ACB = \alpha + \beta$ как внешний угол треугольника CEF. Тогда $x = 180° - \alpha - \beta - \gamma$.

14.8. $x = 180° - \alpha - \beta - \gamma$.

15.3. 2) 5. Указание. Необходимо учесть, что $\angle AKB > > 107°$, т. е. тупой, а потому $AB > BK$.

15.5. 2) $\angle ADB$ внешний для треугольника DCB, а потому $\angle ADB > \angle DCB$, т. е. $\angle ADB > 90°$ и является тупым углом. $\angle AEB$ внешний для треугольника ADE, а потому $\angle AEB > > \angle ADB$, т. е. тоже тупой. Следовательно, $\angle AEB$ — наибольший угол в треугольнике AEB, а потому $AB > AE$.

15.7. $\angle ADE$ — внешний угол для треугольника BDE, а потому $\angle ADF > \angle B$. $\angle ACB$ — внешний угол для треугольника CFE, а потому $\angle CFE > \angle ACB$, но так как углы DFA и CFE вертикальные, то $\angle DFA < \angle ACB$. Необходимо учесть, что $\angle B = \angle C$, а потому в треугольнике DAF $\angle ADF > \angle DFA$. Следовательно, $AF > AD$.

16.3. 1) Нет. 2) В равнобедренном $\triangle ABC$ угол ABC тупой, а потому $AB < AC$, т. е. $AB < 1$ и $2AB < 2$; $AB + BC > AC$, а так как $AB = BC$, то $2AB > 1$. Следовательно, $1 < 2AB < 2$.

16.4. 1) Нет.

16.5. 1) Если предположить, что длина боковой стороны равна 28 мм, то тогда основание треугольника равно 64 мм, но треугольника со сторонами 28, 28 и 64 мм не существует. Если же длина основания равна 28 мм, то боковая сторона треугольника равна 46 мм. Треугольник с такими сторонами существует.

2) Соединим отрезком точки K и M. Тогда в треугольнике KMN $KM + MN > KN$ (1). В треугольнике KLM $KL + LM > KM$. Если в неравенство (1) вместо KM подставить $KL + LM$, то неравенство только усилится, а потому $KL + LM + MN > KN$.

16.6. 1) 25 дм; 10 дм или 17,5 дм; 17,5 дм.

16.7. Сначала надо доказать, что треугольники AOD и BOC равны, а потому $AD = BC$. Из треугольника ADC имеем, что $AC < AD + DC$, но $OC = \frac{1}{2} AC$, а потому $OC < \frac{AD + DC}{2}$. Так как $AD = BC$, то $OC < \frac{BC + DC}{2}$.

17.1. 2) 8 см; 4 см. **17.2.** 2) 24 см; 12 см.

17.3. 2) 12 см; 6 см. **17.4.** 2) 20 см; 10 см.

17.5. 1) Указание. Необходимо доказать: $\triangle ABC = \triangle CDA$. Отсюда следует, что $\angle BAC = \angle ACD$. Дальнейшее очевидно.

2) В прямоугольном треугольнике BDA $\angle DAB=30°$, а потому $AB=2DB=4$ см. В прямоугольном треугольнике BAC $\angle C=30°$, а потому $BC=2AB=8$ см, $CD=BC-DB=6$ см.

17.6. 2) 3 см; 9 см.

17.7. 1) Пусть треугольник ABC равнобедренный и $\angle ABC=120°$, а основание $AC=10$ см, $AD\perp BC$. Так как треугольник тупоугольный, то основание высоты D лежит на продолжении стороны BC за точку B, $\angle A=\angle C=30°$. В прямоугольном $\triangle ADC$ $AC=10$ см и $\angle C=30°$, значит, $AD=\frac{1}{2}AC=5$ см.

2) Пусть ED пересекает AC в точке P, а EF — в точке H. Прямоугольные треугольники AEH и HPE имеют общий угол AHE. Следовательно, и другие их острые углы BAC и DEF равны. $\triangle ABC=\triangle DEF$ по гипотенузе и острому углу. Поэтому периметры их равны, периметр треугольника DEF равен 12 см.

17.8. 1) 34 см. 2) 10 см.

18.3. 2) Указание. Необходимо провести две прямые, параллельные прямой b и удаленные от нее на расстояние, равное PQ, которые расположены по разные стороны от прямой b.

18.5. 1) Опустим из точек A и B перпендикуляры AA_1 и BB_1 на прямую a, и пусть AB пересекает прямую a в точке F. Тогда $AF>AA_1$ и $BF>BB_1$. Отсюда следует, что $AB>10$.

2) Указание. Через вершину B провести прямую, параллельную AC, до ее пересечения с перпендикуляром к стороне AC, проведенным через ее середину.

18.6. 1) Нет. Указание. Задачи решаются аналогично задачам 18.5 (1, 2).

18.7. $\angle AKP=\angle BKM$ как вертикальные углы. Так как треугольники APK и BMK прямоугольные и $\angle AKP=\angle BKM$, то и $\angle PAK=\angle MBK$. Тогда $\triangle APK=\triangle BMK$ по катету и прилежащему к нему острому углу. Отсюда $PK=KM$ и $AK=KB$.

18.8. Прямоугольные треугольники AMK и BKM равны по двум катетам. Отсюда следует, что $\angle BMK=\angle AKM$ и $\angle MAK=\angle KBM$. Так как сумма острых углов в прямоугольном треугольнике равна 90° и $\angle BMK+\angle AMB=90°$, то $\angle BMA=\angle MAK$. Аналогично можно получить, что $\angle BMA=\angle MAK=\angle KBM=\angle AKB$. Отсюда следует, что треугольники MOK, AOM и BOK равнобедренные и $OM=OK=OA=OB$.

19.2. 1) 33 см.

19.3. 2) Необходимо построить биссектрису угла A и найти точки ее пересечения с окружностью с центром в точке C и радиусом, равным BC. Задача имеет два решения.

19.4. 1) 52°. 2) Указание. Задача решается аналогично задаче 19.3 (2).

19.5. 1) Так как точка M принадлежит серединному перпендикуляру стороны AC, то $MC=MA$, а потому $\angle CAM=\angle C=40°$. Зная, что $\angle C=40°$, находим, что $\angle CAB=70°$. $\angle MAB=\angle CAB-\angle CAM=70°-40°=30°$.

2) Искомую точку находим как точку пересечения биссектрисы угла A с серединным перпендикуляром стороны AB.

19.6. 1) 15°. Указание. Задачи решаются аналогично задачам 19.5 (1, 2).

19.7. 1) Опустим перпендикуляры из точки M на стороны AC и AB. Пусть $ME \perp AC$ и $MF \perp AB$. Так как точка M принадлежит биссектрисе угла A, то $MF = ME$. В прямоугольном треугольнике BFM $\angle B = 30°$ и $BM = 10$ см, поэтому $MF = 5$ см. Отсюда следует, что и $ME = 5$ см.

2) Серединный перпендикуляр к отрезку AB, исключая середину AB.

19.8. 1) 7 см. 2) Точка A является точкой пересечения серединного перпендикуляра отрезка BC с прямой a. Если $BC \perp a$, то задача не имеет решения.

20.5. 1) На произвольной прямой от произвольной точки A откладываем отрезок AB, равный DE. От луча AB откладываем угол A, равный углу P, а от луча BA по ту же сторону от прямой AB откладываем угол B, в 2 раза больший угла A. Соответствующие стороны построенных углов пересекаются в точке C. Треугольник ABC искомый. Задача имеет решение, если $\angle P < 60°$.

2) Необходимо построить окружность с центром в точке A и с радиусом, равным $2AB$. Точка пересечения этой окружности с прямой a и будет вершиной C искомого треугольника ABC. Задача имеет два решения.

20.6. 1) На произвольной прямой от произвольной точки A откладываем отрезок AC, равный данному отрезку DE. Данный угол P делим биссектрисой на два равных угла и откладываем от луча AC угол A, равный половине угла P. На стороне этого угла от вершины A откладываем отрезок AB, вдвое больший AC. Треугольник ABC искомый.

2) Необходимо построить окружность с центром в точке A и с радиусом, равным радиусу данной окружности. Точка пересечения этой окружности с данной и будет вершиной C искомого треугольника. Задача имеет либо два решения, либо одно решение, если точка C окажется на прямой AB.

21.1. 2) На произвольной прямой a от произвольной точки A откладываем отрезок AB, равный PQ. На расстоянии, равном P_2Q_2, проводим прямую b, параллельную a. Затем радиусом, равным P_1Q_1, с центром в точке B строим окружность. Точка пересечения этой окружности с прямой b и есть третья вершина C треугольника. $\triangle ABC$ искомый. Задача имеет два решения.

21.2. 2) Указание. Задача имеет два решения.

21.3. 2) На произвольной прямой a от произвольной точки E откладываем отрезок EF, равный PQ. От луча EF откладываем угол, равный заданному тупому углу. Затем на расстоянии, равном P_1Q_1, проводим прямую b, параллельную a, до пересечения со стороной построенного угла. Точка их пересечения D и есть третья вершина треугольника. Треугольник DEF искомый.

21.5. 1) Прежде всего необходимо построить прямоугольный треугольник AMC по катету AC и гипотенузе AM. Затем продлить отрезок CM за точку M и построить отрезок MB, равный MC. Треугольник ABC искомый.

2) На произвольной прямой MN выбираем произвольную точку C и от луча CN откладываем угол, равный данному углу. Затем на расстоянии, равном высоте, проводим прямую a, параллельную MN. Эта прямая пересекает сторону угла в точке A. Через середину отрезка AC проводим прямую, перпендикулярную к AC, до пересечения в точке B с прямой MN. Треугольник ABC искомый.

21.6. 2) На произвольной прямой MN выбираем произвольную точку A и от луча AN откладываем угол EAN, равный данному острому углу. Затем на расстоянии, равном первой высоте, проводим прямую a, параллельную AE. Эта прямая пересечет луч AN в точке B. На расстоянии, равном второй высоте, проводим прямую b, параллельную MN. Эта прямая пересекает луч AE в точке C. $\triangle ABC$ искомый.

21.7. Предположим, что треугольник ABC построен. Продолжим сторону BC за точку C и отложим отрезок CE, равный AC. Тогда $BE=BC+AC$. Треугольник ACE равнобедренный. Тогда его вершина C лежит на перпендикуляре к отрезку AE, проведенном через его середину. Отсюда вытекает построение.

На произвольной прямой MN выбираем произвольную точку B и от луча BN откладываем угол KBN, равный данному острому углу. На луче BK от точки B откладываем отрезок BA, равный PQ, а на луче BN от той же точки — отрезок BE, равный P_1Q_1. Точки A и E соединяем и строим прямую, перпендикулярную к отрезку AE, через его середину. Эта прямая пересекает прямую MN в точке C. $\triangle ABC$ искомый.

2) По катету BH и гипотенузе BC строим прямоугольный треугольник BHC. Затем радиусом, равным BM, и с центром в точке B проводим окружность до пересечения с прямой CH в точке M. На этой прямой от точки M откладываем отрезок MA, равный MC. $\triangle ABC$ искомый. Задача имеет два решения.

21.8. 1) Указание. Задача решается аналогично задаче 21.7 (1).

2) Предположим, что треугольник ABC построен и CM его медиана. Продолжим отрезок CM за точку M и отложим отрезок MD, равный CM. Точки A и D соединим. $\triangle CMB=\triangle DMA$. Тогда $AD=BC$. Отсюда вытекает построение.

Строим треугольник ACD по трем сторонам: AC, AD, которая равна CB, и $CD=2CM$. Находим середину стороны CD точку M и на луче AM от точки M откладываем отрезок MB, равный AM. $\triangle ABC$ искомый. Задача имеет решение, если $2CM<AC+CB$.

22.1. 4) Нет. **22.2.** 4) Нет.

22.3. 3) В прямоугольном треугольнике ADB $\angle A=30°$, а потому $AB=2BD=8$ см; так как DE — медиана, то $BE=AE=$ $=4$ см. $\triangle EBD$ равнобедренный, и $\angle ABD=60°$. Тогда и все его углы равны 60° и $BD=DE=4$ см. Отсюда следует, что $\triangle AED$ равнобедренный.

22.4. 3) 5 см. Указание. Задача решается аналогично задаче 22.3 (3).

22.5. 1) $\triangle ABC=\triangle ADC$. Кроме того, они равнобедренные. Отсюда вытекает, что $\angle BAC=\angle ACD=\angle DAC=\angle BCA$. Из равенства накрест лежащих углов при двух прямых и секущей получаем $AB\parallel CD$ и $AD\parallel BC$.

2) $\triangle ABF=\triangle ADF$ по двум сторонам и углу, заключенному между ними. Отсюда следует, что $BF=DF$.

3) Треугольник BAD равнобедренный, AC — биссектриса угла BAD, значит, $AC\perp BD$.

4) Если из точки F опустить перпендикуляры FM и FN соответственно на AD и AB, то получившиеся прямоугольные треугольники AMF и ANF равны по гипотенузе и острому углу. Отсюда следует, что $FM=FN$.

22.6. Задача решается аналогично задаче 22.5.

23.5. 1) 16.

2) Пусть в выпуклом четырехугольнике $ABCD$ биссектрисы углов A и B пересекаются в точке O, $\angle AOB=180°-\frac{\angle A+\angle B}{2}$. Так как сумма углов выпуклого четырехугольника равна 360°, то $\angle A+\angle B=360°-(\angle C+\angle D)$. Отсюда $\angle AOB=180°-$ $-180°+\frac{\angle C+\angle D}{2}=\frac{\angle C+\angle D}{2}$.

23.6. 2) Пусть в выпуклом четырехугольнике $ABCD$ биссектрисы углов B и D пересекаются в точке O. Продолжим BO до пересечения с CD в точке E; $\angle DOE=180°-\angle DOB$. В четырехугольнике $DOBA$ $\angle DOB=360°-\angle A-\frac{\angle B+\angle D}{2}$, но $\angle B+$ $+\angle D=360°-\angle A-\angle C$. Тогда $\angle DOB=360°-\angle A-180°+$ $+\frac{\angle A}{2}+\frac{\angle C}{2}=180°-\frac{\angle A}{2}+\frac{\angle C}{2}$. Отсюда $\angle DOE=180°-180°+$ $+\frac{\angle A}{2}-\frac{\angle C}{2}=\frac{\angle A-\angle C}{2}$.

23.7. Рассмотрим выпуклый шестиугольник $ABCDEF$ с равными углами. Углы такого шестиугольника равны по 120°. Построим биссектрису BM угла CBA. Тогда $\angle CBM=\angle ABM=$ $=60°$; $CD\parallel BM$, так как $\angle C+\angle CBM=180°$. Аналогично доказываем, что $EF\parallel BM$. Отсюда следует, что $CD\parallel AF$. Точно так же можно доказать, что $BC\parallel FE$ и $AB\parallel DE$.

23.8. Рассмотрим выпуклый пятиугольник $ABCDE$ с равными углами. Углы такого пятиугольника равны по 108°. Рассмотрим прямые AB и ED и секущую AE. $\angle A$ и $\angle E$ — внутренние односторонние углы при этих прямых и секущей. $\angle A+\angle E\neq 180°$. Значит, на основании свойств параллельных прямых можно утверждать, что AB не параллельна ED. Аналогично можно убедиться, что у такого пятиугольника нет параллельных сторон.

24.5. 1) $EACF$ — параллелограмм по определению. Значит, $EF=AC$. Аналогично $KL=AC$. Отсюда следует, что $EF=KL$. Так как FK — общая часть отрезков EK и FL, то $EK=FL$.

2) Рассмотрим четырехугольник AH_1CH_2, у которого два угла AH_1C и AH_2C прямые. Так как сумма углов в выпуклом четырехугольнике равна 360°, то $\angle H_1AH_2+\angle C=180°$. Отсюда следует, что $\angle C=50°$. Тогда $\angle D=130°$.

24.6. 2) 110°, 70°, 110°, 70°.

25.3. 2) У к а з а н и е. Воспользуйтесь тем, что в четырехугольнике $NAFB$ диагонали в точке пересечения делятся пополам.

25.4. 2) У к а з а н и е. Задача решается аналогично задаче 25.3 (2).

25.5. 1) $\triangle MAP=\triangle CNK$ по двум сторонам и углу между ними. Отсюда следует, что $MP=NK$. Так как $AB=CD$ и $BC=AD$ как противоположные стороны параллелограмма и $MA=AP=$ $=CN=CK$, то $MB=KD$ и $BN=PD$. Тогда $\triangle MBN=\triangle PDK$ по двум сторонам и углу между ними. Отсюда следует, что $MN=PK$. Получили, что противоположные стороны четырехугольника $MNKP$ попарно равны, следовательно, $MNKP$ — параллелограмм.

2) Рассмотрим треугольники MOB и AOK. В этих треугольниках $MO=OK$ по условию, $\angle MOB=\angle AOK$ как вертикальные и $\angle OMB=\angle OKA$ как накрест лежащие при параллельных прямых NK и MP и секущей MK. Отсюда следует, что $\triangle MOB=\triangle AOK$ и $OA=OB$. В четырехугольнике $MAKB$ диагонали в точке пересечения делятся пополам, значит, $MAKB$ — параллелограмм.

25.6. У к а з а н и е. Задачи решаются аналогично задачам 25.5 (1, 2).

25.7*. Так как $\angle BAC=\angle ACD$, то $AB\parallel CD$. $\angle ABD=\angle CDB$ как накрест лежащие углы при параллельных прямых AB и CD и секущей BD. В таком случае $\triangle AEB=\triangle CFD$ по катету и острому углу. Отсюда следует, что $AB=CD$. Имеем $AB\parallel CD$ и $AB=CD$. Следовательно, $ABCD$ — параллелограмм.

2) На произвольной прямой a от произвольной точки A отложим отрезок AD, равный BC. От луча AD отложим острый угол, равный A. На расстоянии, равном заданному, проведем прямую b, параллельную a, до пересечения в точке B со стороной построенного угла. Затем через точку D проведем прямую, параллельную AB, до пересечения в точке C с прямой b. $ABCD$ — искомый параллелограмм.

25.8*. 1) Задача решается аналогично задаче 25.7 (1).

2) На произвольной прямой a от произвольной точки A отложим отрезок, равный AD. На расстоянии, равном BE, проведем прямую b, параллельную a. Затем проведем окружность радиусом, равным AB, с центром в точке A до пересечения в точке B с прямой b. Через точку D проводим прямую, параллельную AB,

до пересечения с прямой b в точке C. $ABCD$ — искомый параллелограмм. Задача имеет два решения.

26.5. 1) Пусть величина угла BAD равна x, тогда $\angle BAM = \frac{x}{4}$, а $\angle B = 180° - x$. Так как $\angle AMC = 120°$, то $\angle BMA = 60°$. Рассмотрев треугольник ABM, имеем $\frac{x}{4} + 180 - x + 60 = 180$. Отсюда $x = 80$. Таким образом, $\angle A = 80°$ и $\angle B = 100°$.

26.6. 1) Пусть $AE \perp BD$ и O — точка пересечения диагоналей AC и BD. Так как $BD = 6$, $BE:ED = 1:3$ и $BO = OD$, то можно найти, что $EO = 1{,}5$ см. Рассмотрим прямоугольный треугольник AEO: $EO = 1{,}5$ см, $OA = 3$ см, значит, $\angle EAO = 30°$ и $\angle BOA = 60°$. В таком случае AD и BC — бóльшие стороны прямоугольника. Пусть $OK \perp AD$; $\angle AOD = 120°$, а так как $\triangle AOD$ равнобедренный, то $\angle AOK = 60°$. Рассмотрим прямоугольный треугольник AKO: $AO = 3$ см, $\angle OAK = 30°$, отсюда $OK = 1{,}5$ см.

26.7. Рассмотрим треугольники BKA и AMD (рис. 268). $AB = AD$ и $AK = AM$ как стороны квадратов. Кроме того, $\angle BAK + \angle DAK = 90°$ и $\angle MAD + \angle DAK = 90°$. Отсюда следует, что $\angle BAK = \angle MAD$. Тогда $\triangle BAK = \triangle MAD$ по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $BK = DM$.

26.8. Продолжим сторону CD и отложим от точки D отрезок DF, равный BK (рис. 269). $\triangle ADF = \triangle ABK$, а потому $\angle FAD = \angle BAK$. Пусть $\angle FAD = \alpha$. $\angle MAF = 90° - 2\alpha + \alpha = 90° - \alpha$. Следовательно, $\angle MAF = \angle MFA$, поэтому $\triangle AMF$ равнобедренный и $AM = MF$, но $MF = DF + DM = BK + DM$. Значит, $AM = BK + DM$.

27.3. 1) б) 50 см.

2) Можно доказать, что треугольники AOA_1 и AOA_2 равнобедренные и $OA_1 = OA = OA_2$ (рис. 270). $\angle 1 = \angle 2$, и $\angle 3 = \angle 4$. Так как $\angle 2 + \angle 3 = 90°$, то $\angle AOA_2 + \angle AOA_1 = 180°$, т. е. точки A_1, O и A_2 лежат на одной прямой и $OA_1 = OA_2$. Значит, точки A_1 и A_2 симметричны относительно центра O.

27.4. 1) а) 15 см. 2) Указание. Воспользуйтесь тем, что

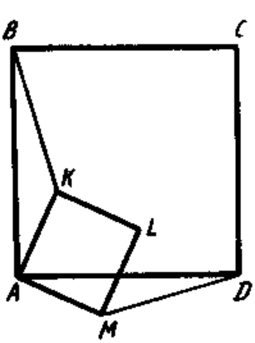

Рис. 268

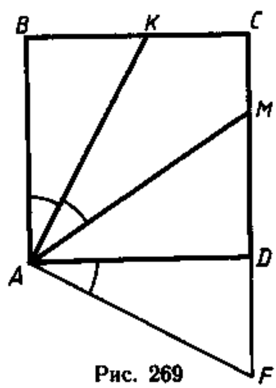

Рис. 269

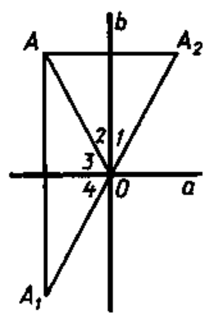

Рис. 270

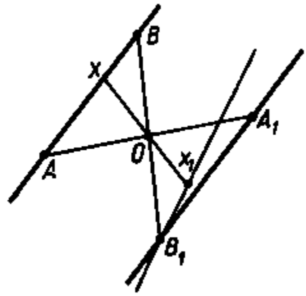

Рис. 271

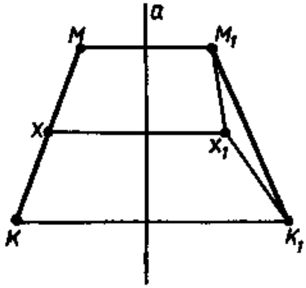

Рис. 272

точка, одинаково удаленная от двух точек, принадлежит серединному перпендикуляру к отрезку, который соединяет эти точки.

27.5. 1) Из равенства треугольников BOC и DOE вытекает, что $DE=BC=5$ см и $\angle BEA=\angle EBC=30°$. $AE=20$ см. В прямоугольном треугольнике ABE $\angle BEA=30°$, а потому $AB=\frac{1}{2}AE=10$ см. Кроме того, $\angle A=60°$. Но по условию $\angle D$ тоже равен $60°$. Следовательно, трапеция равнобедренная и $CD=AB=10$ см. Отсюда периметр трапеции равен 40 см.

2) Возьмем на прямой AB произвольную точку X и построим симметричную ей точку X_1 относительно центра O (рис. 271). Предположим, что точка X_1 не принадлежит прямой A_1B_1. Так как точки B и B_1, X и X_1 симметричны относительно центра O, то можно доказать, что $B_1X_1 \parallel AB$. Аналогично можно доказать, что $A_1B_1 \parallel AB$. Мы получили, что через точку B_1 проходят две прямые B_1X_1 и B_1A_1, параллельные AB, чего быть не может. Следовательно, точка X_1 принадлежит прямой A_1B_1.

27.6. 1) Так как трапеция $ABCD$ равнобедренная, то можно доказать, что $\angle CAD=\angle BDA$. По условию $CE=AE$, значит, треугольник CEA прямоугольный и равнобедренный, поэтому $\angle CAD=45°$. В таком случае и $\angle BDA=45°$, и треугольник AOD прямоугольный с прямым углом AOD. Мы получили, что треугольник BOA прямоугольный и $\angle BAO=\angle BAD-\angle CAD=30°$. Тогда $AB=2BO=10$ см.

2) Выберем на отрезке MK произвольную точку X и построим симметричную ей относительно прямой a точку X_1 (рис. 272). Предположим, что точка X_1 не лежит на отрезке M_1K_1. Так как трапеция XMM_1X_1 симметрична относительно прямой a, то она равнобедренная и $MX=M_1X_1$. Аналогично можно получить, что $KX=K_1X_1$ и $KM=K_1M_1$. Имеем, что $MX+XK=MK$, так как точки M, X и K лежат на одной прямой. Тогда $M_1X_1+X_1K_1=M_1K_1$, а это и означает, что наше предположение неверно и точка X_1 принадлежит отрезку M_1K_1.

27.7. Построим точки M_1, P_1, K_1 и T_1, соответственно симметричные относительно центра O точкам M, P, K и T. Попарно па-

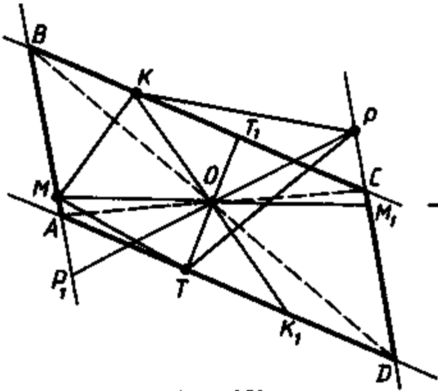

Рис. 273

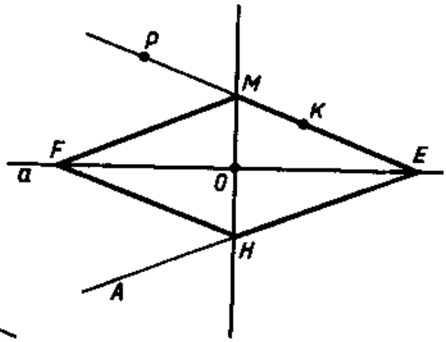

Рис. 274

раллельные прямые MP_1 и PM_1, KT_1 и TK_1 задают параллелограмм $ABCD$. (Построение показано на рис. 273.)

27.8. Проведем прямую PK до пересечения с прямой a в точке E. Построим прямую EA, симметричную прямой EP относительно оси a. Через точку O проведем прямую, перпендикулярную a, до пересечения с прямыми EP и EA в точках M и H соответственно. На прямой a от точки O отложим отрезок OF, равный OE, и точки F, M, E и H соединим. Ромб $FMEH$ искомый. (Построение показано на рис. 274.)

28.3. 2) Указание. Площадь квадрата $ACKM$ в 2 раза больше площади квадрата $ABCD$, значит, площадь квадрата $ACKM$ равна 128 см², следовательно, $AC=8\sqrt{2}$ см. Периметр $ACKM$ равен $32\sqrt{2}$ см.

28.5. 1) Из $\triangle BCD$ найдем $\angle CBD=45°$. Так как $\angle ABC=135°$, то $\angle ABD=90°$. Значит, параллелограмм $ABPK$ является прямоугольником. В $\triangle ABD$ $\angle BAD=45°$ по условию и $\angle ADB=45°$, следовательно, $AB=BD$ и $AB:BP=2:3$. Зная периметр прямоугольника $ABPK$, найдем его стороны, а затем площадь. Площадь прямоугольника $ABPK$ равна 54 см².

2) 36 см². Указание. Проведите прямые KT и MP. Докажите, что прямоугольник $ABCD$ разбился на 8 равных треугольников.

28.6. 1) 30 см. 2) 120 см².

28.7. Указание. Пусть $CB=x$, $BD=y$. Тогда следует доказать тождество

$$xy=\frac{(x+y)^2}{4}-\frac{(y-x)^2}{4}.$$

28.8. Указание. Пусть одна сторона прямоугольника равна x см, тогда другая будет $(10-x)$ см. Площадь прямоугольника равна $x(10-x)$ см², а площадь квадрата 25 см².

$$x(10-x)-25=-(x-5)^2<0.$$

Так как разность отрицательна, то площадь квадрата больше.

29.1. 1) 4,8 см.

2) Указание. Искомая прямая проходит через середину высоты параллелограмма параллельно стороне, на которую эта высота опущена.

29.2. 1) $8\frac{1}{3}$ см.

2) Указание. Искомый прямоугольник может иметь стороны, соответственно равные стороне данного параллелограмма и его высоте, опущенной на эту сторону.

29.3. 1) 24 см^2.

2) От луча AD отложим острый угол так, чтобы его сторона пересекала прямую BC в точке P. Через точку D проведем прямую $DE \parallel AP$ до пересечения с прямой BC в точке E. Параллелограмм $APED$ будет искомым.

29.4. 1) 90 см^2.

2) Указание. Задача решается аналогично задаче 29.3 (4).

29.5. 1) Пусть высота параллелограмма равна x, тогда его площадь равна $3x^2$. Имеем $3x^2=48$, $x=4$, так как $x>0$. Следовательно, одна сторона равна 12 см, другая сторона равна 8 см.

29.5. 2) Площадь искомого квадрата будет равна $0{,}25\cdot\frac{AD}{BK}\times$ $\times AD\cdot BK=0{,}25AD^2$. Тогда квадрат со стороной, равной $0{,}5AD$, будет искомым.

29.6. 1) Из треугольника ABD находим, что $BD=AD$. Но $BD\cdot AD=49$, $AD^2=49$, $AD=7$ см.

2) Пусть BE — высота параллелограмма $ABCD$. Тогда площадь искомого ромба равна $\frac{BE\cdot AD\cdot AB}{4AD}=\frac{BE}{2}\cdot\frac{AB}{2}$. Следовательно, искомый ромб можно построить по острому углу, равному $\angle BAD$, стороне, равной $\frac{AB}{2}$, и высоте, равной $\frac{BE}{2}$.

29.7*. 1) Продлим отрезок BC до пересечения с прямой TP в точке K (рис. 275). Можно доказать, что треугольник ATD равен треугольнику EKP, а треугольник ABE равен треугольнику

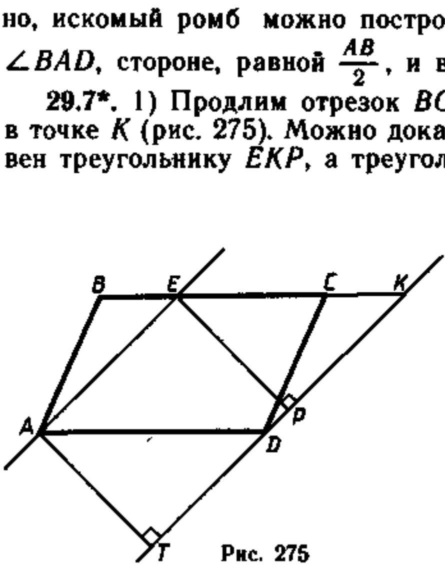

Рис. 275

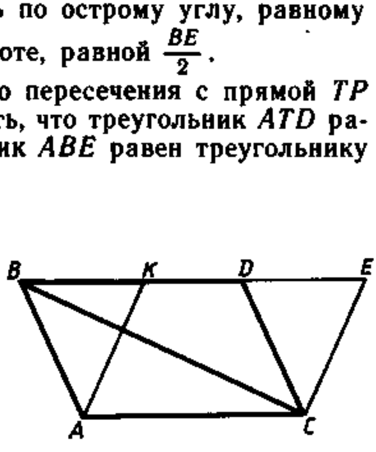

Рис. 276

DCK. Следовательно, площадь прямоугольника $AEPT$ равна площади параллелограмма $DAEK$, а площадь параллелограмма $DAEK$ равна площади данного параллелограмма $ABCD$. Значит, площади четырехугольников $AEPT$ и $ABCD$ равны.

2) Опустим перпендикуляры AK и CP на прямые BC и AD соответственно. Можно доказать, что треугольники AKB и CPD равны. Значит, прямоугольник $AKCP$ и трапеция $ABCD$ имеют одинаковую площадь. Далее можно построить искомый параллелограмм с площадью, равной площади прямоугольника $ABCD$, аналогично тому, как это делалось в задаче 29.3 (2).

29.8*. 1) Аналогично тому, как это сделано в задаче 28.7 (1), можно доказать, что площадь прямоугольника CTT_1C_1 равна площади параллелограмма $ABCD$. Так как треугольники CC_1T и C_1T_1T равны, то искомая площадь равна двум площадям треугольника C_1T_1T, т. е. равна 20 см^2.

2) Проведем прямые BD и CD, соответственно параллельные прямым AC и AB (рис. 276). Можно доказать, что треугольник ABC равен треугольнику DBC. Тогда площадь параллелограмма $ABDC$ будет вдвое больше площади треугольника ABC. Далее проведем AK так, чтобы угол KAC был равен данному острому углу, и прямую EC, параллельную прямой AK. Параллелограммы $ABDC$ и $AKEC$ имеют одинаковую площадь, так как имеют одно основание AC и одинаковые высоты, опущенные на это основание. Значит, параллелограмм $AKEC$ искомый.

30.5. 1) По теореме о сумме углов треугольников находим, что $\angle C=75°$. Тогда $AB=BC$. Проведем высоту CD треугольника. Из треугольника BCD находим, что $CD=5$ см. Значит, искомая площадь $S=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 10=25$ см^2.

2) Площадь квадрата равна половине произведения его диагоналей. Пусть x — сторона квадрата. Тогда $x^2=50$, $x=5\sqrt{2}$ см.

30.6. 1) 12 см. 2) $8\sqrt{2}$ см.

30.7. 1) Пусть площадь треугольника AOC равна x, а площадь треугольника DOB равна y. Тогда $\frac{x}{y}=\frac{AO\cdot OC}{OD\cdot OB}$. Получим систему уравнений $\begin{cases} \frac{x}{y}=\frac{5}{8}, \\ x+y=39, \end{cases}$ решая которую, получаем $x=15$, $y=24$. Площадь $\triangle AOC$ равна 15 см^2.

2) Пусть PK — высота треугольника AMP. Можно доказать, что высота параллелограмма $ABCD$, опущенная на сторону AB, также равна PK. Применяя формулы площадей параллелограмма и треугольника, получаем, что площадь параллелограмма в 4 раза больше площади треугольника, значит, площадь треугольника равна $0{,}25Q$.

30.8. Указание. Задачи решаются аналогично задачам 30.7 (1, 2). 1) 64 см^2. 2) $0{,}5Q$.

31.5. 1) Пусть дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC, BK и CE — ее высоты, причем $KD=20$ см, $BK=12$ см. Можно доказать, что $AK=ED$ и $BC=KE$. Значит,

$$\frac{BC+AD}{2}=\frac{KE+KE+2ED}{2}=KE+ED=KD.$$

Площадь трапеции равна $\frac{BC+AD}{2}\cdot BK=20\cdot 12=240$ см^2.

2) Пусть EK — высота трапеции $ABCD$. Можно доказать, что высоты треугольников ABE и ECD тоже равны EK, а также что $AD:BE:EC=4:1:1$. Тогда площади треугольников ADE, ABE, ECD относятся как $4:1:1$. Учитывая, что площадь трапеции равна сумме площадей этих треугольников, получаем, что искомое значение площади равно 90 см^2.

31.6. 1) Пусть дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC, O — точка пересечения диагоналей трапеции, E и K — середины отрезков BC и AD. Учитывая, что $OB=OC$, $OA=OD$, можно доказать, что EK — высота трапеции, которая проходит через точку O, а также что $\angle EOC=\angle BOE=45^\circ$ и $\angle KOD=\angle AOK=45^\circ$. Из треугольников EOC и KOD получаем $OE=EC$, $OK=KD$, значит, $\frac{AD+BC}{2}=EK$. Далее находим, что площадь трапеции равна 64 см^2.

2) 30 см^2.

32.3. 1) 55 см^2. 2) $30\sqrt{2}$ см^2.

32.4. 1) 126 см^2. 2) $24\sqrt{2}$ см^2.

32.5. 1) Пусть данная прямая пересекает сторону AD в точке K. Можно доказать, что $OK\perp AD$, а также что $AO=13$ см, $OD=\sqrt{41}$ см. Из треугольника AOK $OK^2=13^2-AK^2$, из треугольника DOK $OK^2=41-(16-AK)^2$. Значит, $169-AK^2=41-(16-AK)^2$, откуда $AK=12$ см. Следовательно, $KD=4$ см.

2) $AB=BC=25$ см. Из треугольника ABK находим $AK=7$ см, а из треугольника AKC $AC=5\sqrt{2}$ см. Площадь треугольника ABC равна $0{,}5AK\cdot BC=87{,}5$ см^2.

32.6. 1) Указание. Учитывая, что $O_1A=O_1B$ и $O_2A=O_2B$, можно доказать, что $AK\perp O_1O_2$. Далее задача решается аналогично задаче 32.5 (1). $O_1K=5$ см, $O_2K=9$ см.

2) 67,5 см^2, $30-3\sqrt{10}$ см.

32.7. 1) Пусть O — точка пересечения диагоналей ромба. Тогда из треугольника MBO $MB^2=BO^2+OM^2$, а из треугольника ABO $AB^2=BO^2+AO^2$. Значит, $MB^2-AB^2=OM^2-AO^2=(OM-AO)\cdot(OM+AO)$. Учитывая, что $AO=OC$, $MC=OM-OC$, $OM+AO=AM$, получим равенство $MB^2-AB^2=MC\cdot AM$.

2) Из треугольника ABC $AC^2=BC^2+AB^2$. Из треугольника BDC $BC^2=BD^2+DC^2$. Из треугольника ADB $AB^2=BD^2+AD^2$. Учитывая, что $AC=AD+DC$, получаем $(AD+DC)^2=2BD^2+DC^2+AD^2$, откуда $BD^2=AD\cdot DC$.

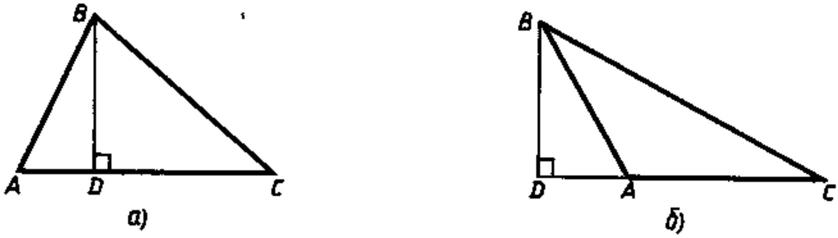

Рис. 277

32.8. 1) Из треугольника ACM $AM^2=AC^2+CM^2$. Из треугольника BCH $BH^2=BC^2+HC^2$. Складывая записанные равенства, получим $AM^2+BH^2=AC^2+BC^2+CM^2+HC^2$. Но из треугольника ABC $AC^2+BC^2=x^2$, а из треугольника MHC $CM^2+HC^2=MH^2$. Значит, $y^2=x^2+MH^2$. $MH=\sqrt{y^2-x^2}$.

2) Используя различные записи формулы площади треугольника ABC, получаем $AB\cdot BC=BD\cdot AC$, или $AB^2\cdot BC^2=BD^2\cdot AC^2$. Из треугольника ABC $BC^2=AC^2-AB^2$. Из треугольника ABD $BD^2=AB^2-AD^2$. Значит, $AB^2\cdot(AC^2-AB^2)=(AB^2-AD^2)\cdot AC^2$, или $AB^4=AD^2AC^2$, откуда $AB^2=AD\cdot AC$.

33.3. 1) 5 см, 250 см^2. 2) $0{,}5a^2\sqrt{2}$.

33.4. 1) 11 см, 162 см^2. 2) $0{,}5a^2\sqrt{2}$.

33.5. 1) Возможны два случая: а) точка D лежит на отрезке AC (рис. 277, *а*); б) точка D не лежит на отрезке AC (рис. 277, *б*). В обоих случаях из треугольника ABD находим $AD=8$ см.

Из треугольника BDC $DC=20$ см. В случае а) $AC=AD+DC=28$ см. В случае б) $AC=DC-AD=12$ см. Площадь треугольника равна 210 см^2 или 90 см^2.

2) Пусть BK — высота ромба. В треугольнике ABK $AK=0{,}5AB$. Тогда $AB^2-0{,}25AB^2=x^2$, откуда $AB=\frac{2x\sqrt{3}}{3}$. Но $AB=AD$. Можно доказать, что треугольник AMD также имеет высоту, равную x. Тогда его площадь равна $\frac{x^2\sqrt{3}}{3}$.

33.6. 1) $2+\frac{2\sqrt{3}}{3}$ см^2 или $2-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ см^2. 2) 60 см^2.

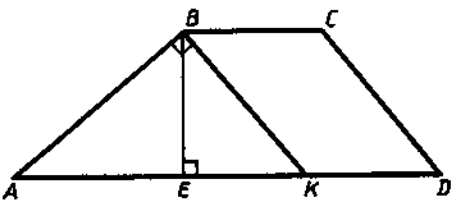

Рис. 278

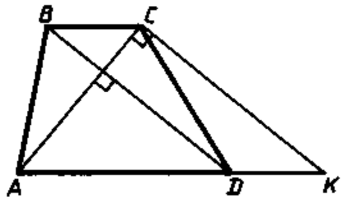

Рис. 279

33.7. Проведем прямую BK параллельно прямой CD (рис. 278). Можно доказать, что $AK=10$ см, $BK=6$ см. Тогда по теореме, обратной теореме Пифагора, установим, что треугольник ABK прямоугольный. Пусть BE — общая высота треугольника ABK и трапеции $ABCD$. Используя различные записи формулы площади треугольника ABK, получаем $BE\cdot AK=AB\cdot BK$, откуда $BE=4{,}8$ см. Площадь трапеции равна 60 см^2.

33.8. Указание. Проведем прямую CK, параллельную прямой BD (рис. 279). Можно доказать, что $CK=12$ см, $AK=15$ см. Тогда установим по теореме, обратной теореме Пифагора, что треугольник ACK прямоугольный. Далее задача решается аналогично задаче 33.7. Площадь трапеции равна 54 см^2.

34.5. 2) Так как $AB=BC$, то $AB:BK=7:5$. BE — биссектриса угла ABC, следовательно, луч BE содержит отрезок BD — биссектрису треугольника ABK. Значит, $AB:BK=AD:DK=7:5$.

34.7. 2) По теореме о биссектрисе треугольника

$$\frac{BA_1}{AB}=\frac{BC-BA_1}{AC}.$$

Учитывая, что $BC=AB$ и $BA_1=AB_1=\frac{1}{2}AC$, получаем

$$\frac{AB_1}{AB}=\frac{AB-0{,}5AC}{AC} \quad \text{или} \quad 0{,}5\frac{AC}{AB}=\frac{AB}{AC}-0{,}5.$$

Пусть $\frac{AC}{AB}=x$. Тогда $0{,}5x=\frac{1}{x}-0{,}5$, откуда $x^2+x-2=0$. Так как $x>0$, то $x=1$. Значит, $\frac{AC}{AB}=1$ и $AC=AB=BC$.

34.8. По условию $\angle 1=\angle 2=\angle 3$ (рис. 280). Значит, CM — биссектриса треугольника ACD, поэтому $AM:MD=AC:CD$. Треугольники MCD и BCD равны (по катету и острому углу), значит, $BD=DM$. Кроме того, $AM=MB$, так как CM — медиана. Тогда $AM:MD=AM:(0{,}5MB)=2:1$. Следовательно, в прямоугольном треугольнике ADC $AC=2CD$, т. е. $\angle CAD=30°$, $\angle ACD=60°$, $\angle 1=30°$, значит, $\angle ACB=90°$.

35.3. 2) 32 см; 64:49. **35.4.** 2) 19,2 м; 25:9.

35.5. 1) В треугольниках ABD и ABC (см. рис. 153) угол A общий, $\angle 1=\angle 2$ по условию, значит, эти треугольники подобны. Следовательно, $\frac{AD}{AB}=\frac{AB}{AC}$, откуда, учитывая условие задачи, получаем $AB=6$ см. Отношение площадей треугольников ABD и ABC равно $\left(\frac{AD}{AB}\right)^2=\frac{4}{9}$.

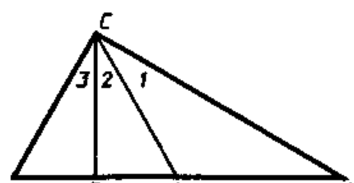

Рис. 280

2) Рассмотрим треугольники AOD и BOC. В них $\angle AOD=\angle BOC$, $\frac{AO}{CO}=\frac{DO}{BO}$. Значит, эти треугольники подобны. Следовательно, $\angle BDA=\angle CBD$, а потому $BC\parallel AD$. Таким об-

разом, точки B и C равноудалены от прямой AD, т. е. треугольники ACD и ABD имеют одинаковые высоты; так как основание AD у этих треугольников общее, то их площади равны.

35.6. 1) $\angle ACB = \angle CMH$, $\frac{BC}{MC} = \frac{AC}{MH}$ (см. рис. 154). Значит, треугольники ABC и MCH подобны. Следовательно, $\angle ABC = \angle MCH$. Значит, $AB \parallel CH$. Отношение площадей треугольников ABC и MCH равно $\frac{BC^2}{MC^2} = 4$.

2) $BC \parallel AD$, так как $ABCD$ — трапеция, $\angle BOC = \angle AOD$, $\angle BCA = \angle DAC$. Значит, треугольники BOC и AOD подобны по двум углам, причем $\frac{BC}{AD} = \frac{OC}{AO} = \frac{2}{3}$. В треугольниках ABC и ACD высоты, проведенные к сторонам BC и AD, равны. Значит, отношение их площадей равно $\frac{BC}{AD}$, т. е. равно $\frac{2}{3}$.

36.5. 1) Можно заметить, что $\frac{AB}{A_1C_1} = \frac{BC}{A_1B_1} = \frac{AC}{B_1C_1} = \frac{4}{3}$, значит, данные треугольники подобны, причем $\angle C_1 = \angle A = 180° - \angle C - \angle B$.

2) Пусть $ABCD$ — данная трапеция, O — точка пересечения ее диагоналей. Опустим перпендикуляры OM и OK на основания AD и BC трапеции соответственно. Так как $AD \parallel BC$, то точки K, O и M лежат на одной прямой. Значит, KM — высота трапеции, равная 10 см. Можно доказать, что треугольники AOD и BOC подобны, причем отношение высот этих треугольников OM и OK равно отношению сходственных сторон AD и BC. Следовательно, $OM:OK = 3:2$, $OM = 6$ см, $OK = 4$ см.

36.6. 1) Пусть a, b, c соответственно катеты и гипотенуза одного треугольника, а a_1, b_1, c_1 — катеты и гипотенуза другого. Допустим, что $\frac{a}{a_1} = \frac{c}{c_1} = k$. Тогда $b^2 = c^2 - a^2 = (kc_1)^2 - (ka_1)^2 = k^2(c_1^2 - a_1^2) = k^2 b_1^2$. Отсюда $\frac{b}{b_1} = k$. Следовательно, стороны данных треугольников пропорциональны, а потому эти треугольники подобны.

2) Пусть O — точка пересечения прямой MH и отрезка BK. Можно доказать, что треугольники MBH и ABC подобны, причем $\angle BMO = \angle BAC$. Тогда, учитывая, что угол ABK является общим для треугольников MBO и ABK, получаем, что эти треугольники также подобны. Значит, $AB:MB = BK:OB = 4:3$, $BO:OK = 3:1$.

36.7*. 1) Можно доказать, что треугольники APM и CKT подобны, причем $\angle APM = \angle CKT$ и $MP \neq KT$. Продолжим отрезок MP до пересечения с прямой BC в точке E. Тогда в силу параллельности прямых BC и AD $\angle APM = \angle PEK$. Значит, $\angle PEK = \angle CKT$. Отсюда следует, что $KT \parallel MP$, т. е. четырехугольник $MKTP$ — трапеция.

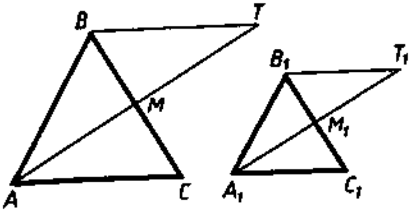

Рис. 281

2) Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ — два данных равнобедренных треугольника, в которых $AB=BC$, $A_1B_1=B_1C_1$ (рис. 281). Пусть AM и A_1M_1 — медианы этих треугольников. Можно доказать, что треугольники ABM и $A_1B_1M_1$ подобны и, следовательно, $\angle BAM=\angle B_1A_1M_1$. На продолжениях медиан отложим $MT=AM$ и $M_1T_1=$ $=A_1M_1$. Можно доказать, что подобны и треугольники ABT, $A_1B_1T_1$. Значит, $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BT}{B_1T_1}$, но $BT=AC$ и $B_1T_1=A_1C_1$. Учитывая равенство боковых сторон равнобедренного треугольника, получим $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{AC}{A_1C_1}$, т. е. треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны.

36.8. 1) Треугольники BME и TDH подобны по трем сторонам, значит, $\angle BME=\angle DTH$, $\angle BEM=\angle DHT$. Но углы BME и DTH соответственные при прямых AB и CD и секущей MH, а углы BEM и DHT соответственные при прямых BC и AD и секущей MH. Следовательно, $AB\parallel CD$ и $BC\parallel AD$. Значит, $ABCD$ — параллелограмм.

2) Пусть в треугольнике ABC AA_1 и CC_1 — высоты. Тогда треугольники ABA_1 и CBC_1 подобны по двум углам, причем $\frac{AB}{CB}=\frac{A_1B}{C_1B}$, следовательно, треугольники A_1BC_1 и ABC подобны по двум сторонам и общему углу ABC между ними.

37.1. 1) 36 см. 2) 2 см. **37.2.** 1) 17 см. 2) 8 см.

37.3. 1) $9+3\sqrt{3}$ см. 2) 16 см, $\sqrt{113}$ см, $\sqrt{113}$ см.

37.4. 1) $4\sqrt{2}+4$ см. 2) 48 см, $3\sqrt{113}$ см, $3\sqrt{113}$ см.

37.5. 1) $A_2B_2=0{,}5A_1B_1$, так как A_2B_2 — средняя линия треугольника OA_1B_1, а $A_1B_1=0{,}5AB$, так как A_1B_1 — средняя линия треугольника ABC. Значит, $A_2B_2:AB=1:4$. Аналогично доказывается, что $B_2C_2:BC=A_2C_2:AC=1:4$. Следовательно, треугольники $A_2B_2C_2$ и ABC подобны.

2) Пусть в треугольнике ABC $AB=15$ см, $BC=15$ см, $AC=$ $=24$ см. Медианы AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке O. Тогда $BB_1=9$ см, $B_1O=3$ см, так как $BO:OB_1=2:1$. B_1O — расстояние от точки O до прямой AC. Площадь треугольника BB_1C равна 54 см^2. Площадь треугольника OBC равна $\frac{2}{3}\cdot 54=36$ см^2 (так как в треугольниках OBC и BB_1C высоты, проведенные из вершины C, равны, а основания относятся как 3:2). Высота OM треугольника BOC является расстоянием от точки O до прямой BC. Эту высоту можно найти, зная площадь треугольника BOC и основание BC. $OM=4{,}8$ см.

37.6. 1) Указание. Решение аналогично задаче 36.5 (1).

2) Пусть в треугольнике ABC $AB=BC$, медианы AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке O. Тогда $BB_1=15$ см и площади тре-

угольников BOC и B_1OC относятся как 2:1 (см. задачу 37.5 (2)). Пусть OM — расстояние от точки O до прямой BC. Согласно условию задачи оно равно 8 см. Тогда $\frac{OM \cdot BC}{2} = \frac{2B_1O \cdot B_1C}{2}$ или, учитывая данные задачи, получаем $B_1C = \frac{4}{5}BC$. С другой стороны, из треугольника BB_1C $BB_1^2 + B_1C^2 = BC^2$ или $225 + \frac{16}{25}BC^2 = BC^2$, откуда $BC = 25$ см, $AC = 40$ см.

38.3. 1) 12, $\frac{60}{13}$, $\frac{25}{13}$, $\frac{144}{13}$.

38.4. 1) $\frac{169}{12}$, $\frac{65}{12}$, 12, $\frac{25}{12}$.

38.5. 1) Пусть один из отрезков, на которые гипотенуза делится высотой, равен x, тогда второй равен $5 - x$. Имеем $2^2 = x(5 - x)$. Решив это уравнение, получим, что $x_1 = 1$, $x_2 = 4$. Катеты равны $\sqrt{5}$ и $2\sqrt{5}$.

2) Построим острый угол с вершиной M. На одной стороне угла отложим последовательно отрезки $MH = A_2B_2$ и $HK = AB$, на другой стороне $MP = A_1B_1$. Через точку K проведем прямую, параллельную прямой HP. Обозначим точку пересечения построенной прямой и прямой MP буквой T. Тогда можно доказать, что $MH:KH = MP:PT$. Это означает, что PT будет искомым отрезком.

38.6. 1) 1 см, $\sqrt{3}$ см, $2\sqrt{3}$ см.

38.7. 1) Так как DM — биссектриса угла CDA, то $AM = MK$. Тогда $MK = BM$, значит, луч CM — биссектриса угла BCD. Следовательно, сумма углов MCD и MDC равна 90°. Тогда треугольник CDM является прямоугольным, а MK — высота этого треугольника, проведенная к гипотенузе. Значит, $MK^2 = CK \cdot KD$, $MK = 6$ см.

2) Построим прямоугольный треугольник с гипотенузой $a + b$ и катетом $|a - b|$. Тогда по теореме Пифагора найдем, что второй катет равен $2\sqrt{ab}$. Далее делим второй катет на три части.

38.8. 1) Пусть в трапеции $ABCD$ $BC \parallel AD$, $\angle BAD = 90°$, $BD \perp AC$, $AB = 2$, $AD = 3$. Проведем через точку B прямую, параллельную прямой AC. Пусть P есть точка пересечения этой прямой с прямой AD. Тогда можно доказать, что $\angle PBD = 90°$, $PA = BC$. Значит, $AB^2 = PA \cdot AD = BC \cdot AD$. $BC = \frac{4}{3}$.

2) У к а з а н и е. $0{,}4\sqrt{ab} = \frac{2}{5}\sqrt{ab}$. Далее см. решение задачи 38.7 (2).

39.3. Сначала построим какой-нибудь треугольник $A_1B_1C_1$, подобный искомому, в котором углы A_1 и B_1 равняются соответственно двум данным углам. Далее построим высоту C_1D_1 треугольника $A_1B_1C_1$ и на луче C_1D_1 от начала отложим отрезок C_1D_1, равный данной высоте. Через точку D проведем прямую AB, параллельную прямой A_1B_1. Она пересечет стороны угла C_1 в некоторых точках A и B. Тогда треугольник ABC_1 искомый. В самом деле, $AB \parallel A_1B_1$, значит, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $C_1D \perp AB$. Следовательно, треугольник ABC удовлетворяет условию задачи.

39.4. Указание. Задача решается аналогично задаче 39.3.

39.5. Возьмем произвольный отрезок PH. На сторонах угла A, равного данному углу, отложим отрезки $AB_1 = PH$, $AC_1 = 2PH$. Соединим точки B_1 и C_1 отрезком. Далее в $\triangle AB_1C_1$ проведем медиану AM_1 и на луче AM_1 от его начала отложим отрезок AM, равный половине данной в условии диагонали. Через точку M проведем прямую $BC \parallel B_1C_1$. Прямая B_1C_1 пересекает лучи AB_1 и AC_1 в точках B и C соответственно. Далее от точки M на луче AM_1 отложим отрезок MD, равный AM. Соединим точку D с точками B и C отрезками. Четырехугольник $ABCD$ будет искомым параллелограммом. Докажем это.

Так как $BC \parallel B_1C_1$, то можно доказать, что пары треугольников ABC и AB_1C_1, ABM и AB_1M_1, ACM и AC_1M_1 подобны. Тогда имеем $AB:AB_1 = AC:AC_1$, $BM:B_1M_1 = AM:AM_1 = CM:C_1M_1$, откуда следует, что $BM:CM = B_1M_1:C_1M_1 = 1:1$ и $AB:AC = AB_1:AC_1 = 1:2$. Значит, $ABCD$ — параллелограмм, в котором угол A и диагональ AD равны данным по построению, а также стороны относятся как $1:2$ по доказанному.

39.6. Указание. Задача решается аналогично задаче 39.5.

39.7. Сначала построим треугольник $M_1H_1P_1$, в котором $M_1H_1 = H_1P_1$, $\angle M_1H_1P_1 = 90°$ (рис. 282). Затем проведем луч AH_1, который пересечет сторону BC в точке H и отрезки MH и HP, параллельные отрезкам M_1H_1 и H_1P_1 соответственно. Треугольник MHP будет искомым. В самом деле, так как $MH \parallel M_1H_1$, $HP \parallel H_1P_1$, то можно доказать, что пары треугольников AMH и AM_1H_1, AHP и AH_1P_1 подобны. Следовательно, $MH:M_1H_1 = AH:AH_1 = PH:P_1H_1$ и $\angle AH_1M_1 = \angle AHM$, $\angle AH_1P_1 = \angle AHP$. Тогда $MH:PH = M_1H_1:H_1P_1 = 1:1$, а также $\angle MHP = \angle AH_1M_1 + \angle AH_1P_1 = 90°$.

39.8. Указание. Задача решается аналогично задаче 39.7.

40.1. 6 м. **40.2.** 168 м. **40.3.** 22,5 м. **40.4.** 71,7 м.

41.1. 2) 4 см и 20 см. **41.2.** 2) 70 м, 420 м.

41.3. 2) 32 м, 20 м. **41.4** 2) 20 м, 36 м.

41.5. 1) Рамка имеет вид, изображенный на рисунке 283. Тогда $A_1B_1 = 26$ см, $B_1C_1 = 36$ см; $\frac{A_1B_1}{AB} \neq \frac{B_1C_1}{BC}$ и $\frac{A_1B_1}{BC} \neq \frac{B_1C_1}{AB}$. Это

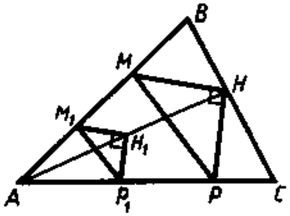

Рис. 282

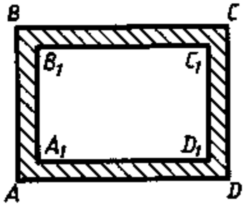

Рис. 283

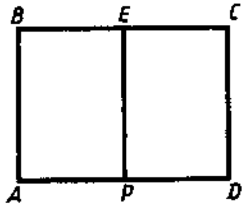

Рис. 284

означает, что сходственные стороны прямоугольников $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ не пропорциональны, значит, эти прямоугольники не являются подобными.

2) Так как трапеция $ABCD$ равнобедренная, то можно доказать, что $\angle BCA = \angle CBD$. Кроме того, $AB = BC$, поэтому $\angle BCA = \angle BAC$. Следовательно, треугольники ABC и BOC подобны по двум углам, причем стороны AC и BC в этих треугольниках сходственные, значит, отношение периметров треугольников ABC и BOC равно отношению $AC:BC$, т. е. равно $5:4$.

41.6. 1) На рисунке 284 прямоугольники $ABCD$ и $BAPE$ соответствуют целой и половине плиты. Так как прямоугольники $ABCD$ и $BAPE$ подобны, то $\frac{AB}{AD} = \frac{AP}{AB}$, учитывая, что $AP = 0{,}5AD$, получаем $AD:AB = \sqrt{2}:1$.

2) Пусть в трапеции $ABCD$ AD и BC — основания, $AD = 9$ см, $BC = 4$ см, $AC = 6$ см. Тогда можно заметить, что $\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{AC}$, кроме того, $\angle BCA = \angle CAD$. Значит, треугольники ADC и ABC подобны по двум сторонам и углу между ними, причем AD и AC — их сходственные стороны. Следовательно, отношение периметров этих треугольников равно $AD:AC$, т. е. равно $3:2$.

42.5. $\frac{56}{65}, \frac{33}{65}, \frac{56}{33}; \frac{12}{13}, \frac{5}{13}, \frac{12}{5}; \frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{3}$.

42.6. $\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{3}{4}; \frac{15}{17}, \frac{8}{17}, \frac{15}{8}; \frac{84}{85}, \frac{13}{85}, \frac{84}{13}$.

43.1. 1) 4,24 см, 1,96 см, 24°48′. 2) 70°, 70°, 40°.

43.2. 1) 9,3 см, 8,2 см, 48°39′. 2) 20°2′, 20°2′, 139°56′.

43.3. 1) 34,8 см, 12,2 см, 69°30′. 2) 9,0 см^2, 18,8 см.

43.4. 1) 17,8 см, 8 см, 26°36′. 2) 124 см^2, 45,6 см.

43.5. 1) 4,2 см, 50°1′, 39°59′. 2) 48°35′, 90°54′, 5,2 см.

43.6. 1) 3,2 см, 50°40′. 2) 20,7 см, 21°13′, 17°34′.

44.5. 1) $l\left(\cos\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\alpha - \sin\frac{\alpha}{2}\right)$.

2) Можно доказать, что $\angle ABC$ тупой, значит, точка D лежит на продолжении отрезка AB за точку B. Из прямоугольного треугольника ACD находим $AC = \frac{40}{\sqrt{3}}$ см. Пусть BE — высота треугольника ABC. Тогда $AE = \frac{20}{\sqrt{3}}$ см. Из прямоугольного треугольника ABE найдем $BE = \frac{20}{3}$ см.

44.6. 1) $m(\sin\alpha - \cos\alpha \operatorname{tg}(\alpha - \beta))$. 2) 30 см.

44.7. Можно доказать, что треугольники ACE и BFC подобны, причем $\frac{AE}{BF} = \frac{AC}{BC}$, тогда $\frac{FC}{BC} = \frac{1}{2}\cdot\frac{AC}{BC} = \frac{1}{4}$. Следовательно, искомый косинус равен $\frac{1}{4}$.

44.8. $\frac{4}{5}$.

45.5. 1) Указание. Рассмотрите равнобедренный треугольник AOB и докажите, что треугольник AMB равносторонний. Его периметр равен $24\sqrt{3}$ см.

45.6. 1) $12+6\sqrt{3}$ см.

46.5. 1) $\angle ACB=28°$. Далее сумма углов четырехугольника $PBKO$ равна 360°, значит, $\angle POK=123°$. Следовательно, $\smile PK=123°$. Аналогично определяем, что $\smile KT=152°$, $\smile PT=85°$. По теореме о вписанном угле находим $\angle PKT=42°30'$.

2) По теореме о произведении хорд окружности имеем $CK\cdot KD=AK\cdot KP$ (рис. 285). Пусть радиус окружности равен x. Тогда $KC=x-11$, $KD=x+11$. Значит, $(x+11)(x-11)=168$ и $x>0$. Получаем $x=17$ см.

46.6. 1) Сумма углов четырехугольника $MAOC$ равна 360°, тогда $\angle AOC=98°$, $\angle ABC=49°$ как вписанный. Аналогично находим $\angle ACB=69°$. Тогда $\angle CAB=62°$. 2) 5 дм.

47.3. 1) 38°. 2) 2:3.

47.4. 1) $16\sqrt{3}$ см^2. 2) 10 см, $2\sqrt{73}$ см, $4\sqrt{13}$ см.

47.5. 1) $\angle BCC_1=30°$, $\angle ABC=60°$. Высота AA_1 треугольника ABC проходит через точку O. Тогда из прямоугольного треугольника BAA_1 $\angle BAA_1=30°$.

2) $BO=24$ см, $OC=10$ см по теореме о точке пересечения медиан треугольника. Тогда из прямоугольного треугольника BOC находим $BC=26$ см. Медиана AA_1 треугольника ABC проходит через точку O. $OA_1=13$ см, так как медиана прямоугольного треугольника BOC, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы. $AO=2OA_1=26$ см.

47.6. 1) Точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника равноудалена от его вершин. Значит, $OA=OB=OC$. Находим $OA=\frac{10\sqrt{3}}{3}$ см (сторону равнобедренного треугольника AOB с данным основанием и углом при вершине). Тогда $OC=\frac{10\sqrt{3}}{3}$ см.

2) Точка O, равноудаленная от сторон треугольника ABC, является точкой пересечения биссектрис AA_1, BB_1, CC_1. Тогда, применяя к треугольнику ABC теорему о сумме углов треугольника,

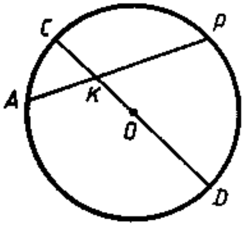

Рис. 285

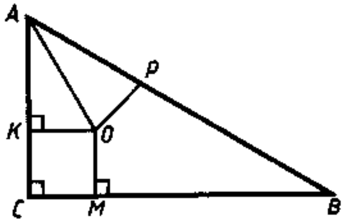

Рис. 286

получаем $2\angle ABO+2\angle OAB+2\angle OCB=180°$. Так как $\angle ABO=$ $=39°$, то $\angle OAB+\angle OCB=51°$. Учитывая, что $\angle OAB=\angle OAC$, а $\angle OCB=\angle OCA$, находим, что $\angle AOC=129°$.

47.7*. Пусть A и B — точки пересечения окружности с прямой a, а B_1 и A_1 — общие точки прямых AM и BM с окружностью соответственно. Тогда $\angle AA_1B=\angle AB_1B=90°$, так как AB — диаметр окружности. Значит, отрезки AA_1 и BB_1 — высоты треугольника ABM. Пусть O — точка пересечения этих высот. Тогда прямая MO содержит третью высоту треугольника AMB. Значит, $MO\perp AB$ и прямая MO искомая.

48.5. 1) В треугольнике ABC $\angle B=30°$, $\angle C=90°$ (рис. 286). Тогда $\angle BAC=60°$, O — центр вписанной окружности, M, P, K — точки касания окружности сторон треугольника ABC. Тогда OA — биссектриса угла BAC. Значит, $\angle OAC=30°$. В прямоугольном треугольнике OKA $OK=4$ см, $KA=4\sqrt{3}$ см, $KC=4$ см, $AC=$ $=4+4\sqrt{3}$ см.

2) Пусть в прямоугольной трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD $\angle A=90°$, O — центр вписанной окружности, $CO=6$ см, $DO=8$ см. CO и BO — биссектрисы углов ADC и ACD. Тогда $\angle OCD+\angle ODC=0{,}5\angle ADC+0{,}5\angle BCD=0{,}5(\angle ADC+\angle BCD)=$ $=0{,}5\cdot 180°=90°$. Значит, $\angle COD=90°$. Из прямоугольного треугольника OCD найдем $CD=10$ см. Высота OM треугольника OCD является одновременно и радиусом вписанной окружности. Используя различные записи формулы площади треугольника OCD, получаем $OM\cdot CD=OC\cdot OD$, откуда $OM=4{,}8$ см. $AB=9{,}6$ см, так как AB равна диаметру окружности. По свойству описанного четырехугольника $AD+BC=AB+CD=19{,}6$ см. Площадь трапеции равна $\frac{AB}{2}\cdot(AD+BC)=94{,}08$ см^2.

48.6. 1) $10(\sqrt{3}+1)$ см. 2) 216 см^2.

49.5. 1) Пусть в треугольнике ABC $AB=BC$, O — центр описанной окружности, BM — высота. Тогда $MC=6$ см, $BM=8$ см, $OB=OC$, $OM=8-OC$, если точка O лежит внутри треугольника ABC, и $OM=OC-8$, если точка O не лежит внутри $\triangle ABC$. Из $\triangle MOC$ получаем $(OC-8)^2+6^2=OC^2$, откуда $OC=6{,}25$ см.

2) Пусть в трапеции $ABCD$ $AB=CD$, O — точка пересечения диагоналей, $\angle BOA=48°$, AD — диаметр описанной окружности. Тогда $\angle ABD=90°$. По внешнему углу при вершине равнобедренного треугольника AOD находим $\angle BDA=24°$. Значит, $\angle DBC=24°$, $\angle ABC=114°$, $\angle BAD=66°$.

49.6. 1) 12,5 см.

2) Пусть в трапеции $ABCD$ $AB=BC=CD=5$ см, $\angle BAD=$ $=\angle CAD=60°$. Найдем, что $AD=10$ см. Обозначим середину отрезка AD буквой O. В треугольнике AOB $AB=AO=5$ см, $\angle BAO=60°$, значит, и $\angle BOA=\angle ABO=60°$ и $BO=AB=5$ см. Аналогично $CO=5$ см. Значит, точка O равноудалена от всех вершин трапеции, т. е. является центром окружности, описанной около нее. Радиус этой окружности равен 5 см.

50.3. 2) Да.

50.5. 2) $\overrightarrow{EK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, так как $EK=\frac{1}{2}AC$ и $EK \parallel AC$ по теореме о средней линии треугольника, аналогично $\overrightarrow{HM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Значит, $\overrightarrow{EK}=\overrightarrow{HM}$.

50.6. 2) Точки A, B, C, D являются вершинами некоторого четырехугольника $ABDC$, так как никакие три из четырех точек A, B, C, D не лежат на одной прямой. Четырехугольник $ABDC$ является параллелограммом, потому что из условия $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ следует, что отрезки AB и CD лежат на параллельных прямых и равны. Значит, диагонали четырехугольника $ABDC$ — отрезки AD и BC пересекаются и в точке пересечения делятся пополам.

51.5. 2) Параллелограмм, построенный на векторах $\vec{b}$ и $\vec{c}$, будет ромбом с тупым углом, равным 120°. В таком ромбе меньшая диагональ равна его стороне. Значит, $|\vec{b}+\vec{c}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=$ $=|\vec{a}|$. Вектор $\vec{b}+\vec{c}$ будет направлен по меньшей диагонали ромба, т. е. будет противоположен вектору $\vec{a}$. Значит, $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$.

51.6. 2) Указание. Задача решается аналогично задаче 51.5 (2). Следует сложить по правилу параллелограмма векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

52.1. 2) а) $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BM}$.

52.2. 2) а) $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}$; б) $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}$.

52.3. 2) $\overrightarrow{AB}=-\vec{c}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{c}-\vec{a}$, $\overrightarrow{DA}=\vec{a}-\vec{c}$.

52.4. 2) $\overrightarrow{BC}=\vec{c}+\vec{a}$, $\overrightarrow{DC}=\vec{a}$, $\overrightarrow{DA}=-\vec{a}-\vec{c}$.

52.5. 2) Так как $ABCD$ — параллелограмм, то $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$. Значит, $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}$. Отсюда получаем $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$.

52.6. 2) Из условия следует, что $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}$. Значит, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, т. е. отрезки AB и CD имеют равные длины и лежат на параллельных прямых. Следовательно, четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом.

53.1. 2) а) $\overrightarrow{CA}$; б) 6. **53.2.** 2) а) $\overrightarrow{CM}$; б) 5.

53.3. 2) 6,5 см. **53.4.** 2) 16 см.

53.5. 2) Проведем высоту CM в трапеции $ABCD$, так как угол ABC равен 45°, то углы CAD и CDA также равны 45°, т. е. $CA=CD$ и $AM=MD$. Далее можно доказать, что $BA=CM$ и $BA \parallel CM$. Значит, $\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{MD}$. $|\overrightarrow{MD}|=0{,}5AD=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

53.6. 2) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Указание. Задача решается аналогично задаче 53.5 (2).

54.1. 2) $\overrightarrow{OA}=-0{,}5\overrightarrow{AB}-0{,}5\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AK}=0{,}5\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

54.2. 2) $\overrightarrow{DP}=0{,}5\overrightarrow{DA}+0{,}5\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DM}=0{,}5\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}$.

54.3. 2) $\overrightarrow{AK}=\vec{p}+0{,}2\vec{k}$, $\overrightarrow{KD}=-\vec{p}+0{,}8\vec{k}$.

54.4. 2) $\overrightarrow{CE}=\vec{p}+\frac{1}{6}\vec{k}$, $\overrightarrow{ET}=\frac{5}{6}\vec{k}-\frac{1}{2}\vec{p}$.

54.5. 2) $\overrightarrow{MH}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AH}=-\frac{2}{3}(\vec{a}+\vec{p})+\frac{1}{2}\vec{p}=-\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{1}{6}\vec{p}$.

54.6. 2) $\overrightarrow{ET}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BT}=\frac{2}{3}(\vec{a}+\vec{p})-\frac{1}{2}\vec{a}=\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{p}$.

55.3. 1) а) 2; б) $-\frac{1}{2}$; в) -1.

2) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}=3\overrightarrow{BH}-3\overrightarrow{BM}=3(\overrightarrow{BH}-\overrightarrow{BM})=3\overrightarrow{MH}$. Так как точки M и H не принадлежат прямой AC, то $AC\parallel MH$; кроме того, $AC=3MH$.

55.4. 1) а) 2; б) 1; в) -1. 2) Указание. Задача решается аналогично задаче 55.3 (2).

55.5. 1) Вектор $\alpha\vec{p}$ будет коллинеарен вектору $\vec{p}$ при любом действительном значении α. Так как векторы $\vec{a}$ и $\vec{p}$ неколлинеарны, то $\vec{a}\neq\alpha\vec{p}$. Полученное противоречие доказывает, что искомого числа α не существует.

2) $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{ME}-\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{OB}$. С другой стороны, $\overrightarrow{DT}=\overrightarrow{HT}-\overrightarrow{HD}=\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HB}=\overrightarrow{OB}$. Значит, $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{DT}$. Отсюда следует, что $AE\parallel DT$ и $AE=DT$. Значит, четырехугольник $AETD$ является параллелограммом.

55.6. 1) $\alpha=0$, $\beta=0$.

55.7. 1) Пусть M — середина отрезка KE. Тогда $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AK}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$. Учитывая, что $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$, а $\overrightarrow{AE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$, получаем $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$. С другой стороны, $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$. Значит, $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AO}$, а потому точки M и O совпадают.

2) Пусть две медианы AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке O, причем $AO=xOA_1$, $BO=yOB_1$, где x и y — некоторые действительные числа, отличные от нуля. Тогда $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=x\overrightarrow{OA_1}-y\overrightarrow{OB_1}$, кроме того, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}=2\overrightarrow{CA_1}-2\overrightarrow{CB_1}=2\overrightarrow{B_1A_1}=2\overrightarrow{OA_1}-2\overrightarrow{OB_1}$. Значит, $x\overrightarrow{OA_1}-y\overrightarrow{OB_1}=2\overrightarrow{OA_1}-2\overrightarrow{OB_1}$. Учитывая, что векторы $\overrightarrow{OA_1}$ и $\overrightarrow{OB_1}$ неколлинеарны, получаем $x=y=2$. Следовательно, в любом треугольнике любые две медианы делятся точкой пересечения в отношении $2:1$, считая от вершины.

55.8. 1) Пусть $\overrightarrow{CB}=x\overrightarrow{CA_1}$, $\overrightarrow{CA}=y\overrightarrow{CB_1}$, где x и y — некоторые действительные числа, отличные от нуля. Тогда $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=$ $=2\overrightarrow{OA_1}-2\overrightarrow{OB_1}=2\overrightarrow{B_1A_1}$. Кроме того, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}=x\overrightarrow{CA_1}-y\overrightarrow{CB_1}$. Так как $\overrightarrow{B_1A_1}=\overrightarrow{CA_1}-\overrightarrow{CB_1}$, получаем $x\overrightarrow{CA_1}-y\overrightarrow{CB_1}=2\overrightarrow{CA_1}-2\overrightarrow{CB_1}$. Векторы $\overrightarrow{CA_1}$ и $\overrightarrow{CB_1}$ неколлинеарны, значит, $x=y=2$. Следовательно, отрезки AA_1 и BB_1 являются медианами треугольника.

2) Пусть в параллелограмме $ABCD$ O — середина диагонали BD, а M — середина диагонали AC. Тогда $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$. Следовательно, $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AM}$, т. е. точки M и O совпадают, откуда следует утверждение задачи.

56.5. 1) Пусть в равнобедренной трапеции $ABCD$ диагональ BD составляет с большим основанием AD угол 60°. Проведем перпендикуляры BK и CM из вершин B и C на прямую AD. Тогда $AK=MD$, $BC=KM$. Длина средней линии трапеции равна $0{,}5\,(BC+AD)=KM+MD=KD$. Учитывая, что $BD=4$ см, найдем $KD=2$ см.

2) Единственный случай, соответствующий условию, показан на рисунке 287. Тогда $AD=2BC$, а длина средней линии равна $1{,}5BC$.

56.6. 1) 8 см. 2) Единственный случай, соответствующий условию, показан на рисунке 288.

57.1. б) 4 см^2, 12 см; в) $\overrightarrow{BD}=4\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{BC}$.

57.2. б) 40 см, 84 см^2; в) $\overrightarrow{PM}=\frac{12}{7}\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PT}$.

57.3. б) 20 см, 20 см^2; в) $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\frac{8}{5}\overrightarrow{BK}$.

57.4. б) 52 см, 156 см^2; в) $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CT}+\frac{13}{18}\overrightarrow{CD}$.

57.5. а) Легко доказать, что $MB=KD=2$ см и $MB\parallel KD$. Значит, $MBKD$ — параллелограмм. Далее проведем высоту ромба DE к стороне AB. Тогда из треугольника DBE $DE^2=(2\sqrt{5})^2-$ $-BE^2$, а из треугольника DAE $DE^2=5^2-(5-BE)^2$. (Если точка E не попадает на отрезок AB, то $DE^2=5^2-(BE-5)^2=25-$

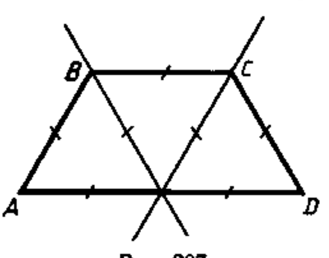

Рис. 287

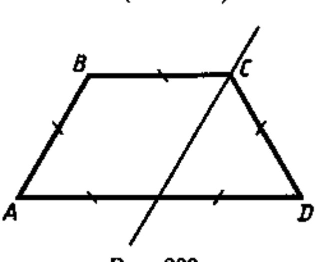

Рис. 288

$-(5-BE)^2$.) Имеем $20-BE^2=25-(5-BE)^2$, откуда $BE=2$ см. Значит, точки E и M совпадают, и, следовательно, $\angle BMD=90°$, т. е. $MBKD$ — прямоугольник.

б) $DM=DE=4$. Значит, периметр прямоугольника $MBKD$ равен 12 см, а площадь 8 см^2.

в) $\overrightarrow{KM}=\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BM}=\frac{3}{5}\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}+\frac{2}{5}\overrightarrow{BA}=-0{,}2\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}$.

57.6. б) 40 см, 96 см^2; в) $\overrightarrow{PM}=-\overrightarrow{MT}-\frac{13}{8}\overrightarrow{MA}$.

58.1. б) 6,1 см, 5,1 см, 4,3 см, 76 см^2.

58.2. б) 4,1 см, 2,9 см, 2,0 см, 11,2 см^2.

58.3. 1) Указание. Отношение площадей подобных треугольников DEC и ADM равно квадрату коэффициента подобия. Значит, вначале следует найти площадь треугольника ADM. Площадь треугольника DCE равна 94,4 см^2.

2) $\frac{5}{13}$.

58.4. 1) 68,4 см^2. 2) $\frac{4}{5}$.

58.5. 1) Можно доказать, что треугольники AOD и BOC подобны. Отсюда находим $AD=6$ мм, $AO=\frac{20}{3}$ мм. Далее находим искомый угол из прямоугольного треугольника AOD, $\angle AOD=$ $=64°9'$.

2) Можно доказать, что треугольники DBE и ABC подобны с коэффициентом подобия, равным $BD:BC$. По косинусу угла C найдем $\sin C=\frac{4}{5}$, а из прямоугольного треугольника KBC найдем $BC=20$ мм. Тогда коэффициент подобия равен $4:20=0{,}2$, а искомое отношение 0,04.

58.6. 1) 48°35'. 2) 12 см.

58.7. 1) Можно доказать, что треугольники ABC и ADC подобны, причем $\frac{BC}{AC}=\frac{AC}{AD}$, т. е. $AC^2=BC\cdot AD$, откуда $AC=4$. Высота CE трапеции находится из прямоугольного треугольника CAE. Площадь трапеции равна 12,9 см^2.

2) Пусть угол ABC равен x, тогда $\angle MCH=180°-x$, $\angle MAH=x$, так как сумма углов четырехугольника $AMCH$ равна 360°, тогда $\angle MAH=\angle ABC$. Известно также, что две высоты параллелограмма обратно пропорциональны сторонам параллелограмма, на которые они опущены, тогда $\frac{AM}{CD}=\frac{AH}{BC}$ или $\frac{AM}{AB}=\frac{AH}{BC}$. Следовательно, треугольники MAH и ABC подобны по двум сторонам и углу между ними. Их коэффициент подобия равен $MH:AC=3:4$. Тогда искомое отношение равно 9:16.

58.8. 1) 4,0 см^2. 2) 4:9.

59.5. 1) Указание. $OC^2=OD\cdot AO=48$, $OC=4\sqrt{3}$ см. Отсюда из треугольника AOC получаем $\angle AOC=30°$, $\angle BOC=60°$. Следовательно, $\smile BC=60°$.

2) Пусть $ABCD$ — данная трапеция, в которой $AD=24$ см, $BC=10$ см, высота BE равна 17 см. Окружность, описанная около трапеции, будет также описана около треугольника ABD. Можно найти, что $AE=7$ см, $ED=17$ см. Тогда угол DBE равен 45°. Отложим на луче EA от точки E отрезок EK, равный 17 см. Тогда $\angle KBE=45°$, а $\angle ABE<45°$. Следовательно, $\angle ABD<90°$. Далее, углы BAD и CDA острые, так как являются углами при большем основании трапеции, а угол BDA меньше угла CDA и, следовательно, тоже острый. Таким образом, треугольник ABD является остроугольным. Значит, центр окружности, описанной около него, лежит внутри этого треугольника и, следовательно, внутри трапеции.

59.6. 1) Треугольник CBD является вписанным в окружность, центр которой лежит на стороне BC. Значит, $\angle BDC=90°$. $BC\perp CA$ по свойству касательной. Таким образом, CD является высотой, опущенной из вершины прямого угла треугольника ABC. Значит, $CD^2=BD\cdot AD=12$, $CD=2\sqrt{3}$ см. Далее из треугольника CBD находим $\angle CBD=30°$. Так как угол CBD вписанный, то искомая градусная мера равна 60°.

2) Пусть $BD=x$, тогда из прямоугольных треугольников ABD и BCD находим $AB=0{,}5x$, $AD=0{,}5\sqrt{3}\,x$, $BC=x$, $CD=x\sqrt{2}$. Если предположить, что биссектрисы всех углов четырехугольника $ABCD$ пересекаются в одной точке, то существует точка, равноудаленная от всех сторон четырехугольника, т. е. в этот четырехугольник можно вписать окружность. Значит, должно выполняться условие $AB+CD=BC+AD$. Но $0{,}5x+x\sqrt{2}\neq x+0{,}5\sqrt{3}\,x$. Значит, наше предположение неверно.

60.3. 1) $\vec{d}=8\vec{i}+10\vec{j}$. 2) $\vec{a}$ и $\vec{c}$, $\vec{b}$ и $\vec{d}$.

60.4. 1) $\vec{p}=-6\vec{i}+0\vec{j}$. 2) $\vec{m}$ и $\vec{n}$, $\vec{m}$ и $\vec{p}$, $\vec{n}$ и $\vec{p}$, $\vec{n}$ и $\vec{k}$, $\vec{p}$ и $\vec{k}$.

60.5. 1) Пусть M — середина стороны BC. Тогда $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$, $\overrightarrow{AO}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AO}=-2\vec{i}+\vec{j}$.

2) Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{c}$ есть угол между биссектрисами первого и второго координатных углов, т. е. 90°.

60.6. 1) $\overrightarrow{BA}=10\vec{i}+\vec{j}$. 2) 180°.

61.3. 1) $(-1;\ -2)$. 2) $(2{,}5;\ 0)$.

61.4. 1) $(-4;\ -4)$. 2) $\left(0;\ -\frac{5}{3}\right)$.

61.5. 1) Пусть M — середина отрезка AB. Тогда $M\,(4;\ 6)$. Так как точка C является серединой отрезка AM, ее координаты равны $(2{,}5;\ 4)$.

2) Предположим, что точки A, B, C лежат на одной прямой. Тогда $\overrightarrow{AB}=k\cdot\overrightarrow{AC}$, где k — некоторое число, отличное от нуля. Так как $AB\,\{5;\ 0\}$, $AC\,\{5;\ 12\}$, $5=5k$, $0=12k$. Из полученного противоречия следует, что точки A, B, C не лежат на одной прямой.

61.6. 1) Задачу можно решать аналогично задаче 61.5 (1). Предложим другое решение.

$\overrightarrow{PM}=2\overrightarrow{MK}$. Пусть $K(x;\ y)$, тогда $\overrightarrow{PM}\{8;\ 6\}$, $\overrightarrow{MK}\{x-14;\ y-9\}$. Значит, $8=2(x-14)$, $6=2(y-9)$, откуда $x=18$, $y=12$; $K(18;\ 12)$.

2) Задачу можно решить аналогично задаче 61.5 (2). Приведем другое решение. По формуле расстояния между двумя точками находим, что $MH=\sqrt{13}$, $HP=\sqrt{13}$, $MP=2\sqrt{13}$. Значит, $MH+HP=MP$, т. е. точка H принадлежит отрезку MP.

61.7. 1) Рассмотрим расположение треугольника ABC относительно осей координат, показанное на рисунке 289. Проведем через точки A, B, C прямые, параллельные осям координат. Так как координаты точек A, B, C — четные числа, координаты точек P, M, H также будут четными. Следовательно, отрезки MA, AP, MC, CH, BH, PB выражаются четными числами. Отсюда вытекает, что площади треугольников APB, AMC, BCH выражаются натуральными числами. Так как отрезки PM и PH также выражаются натуральными числами, то и площадь прямоугольника $PMCH$ выражается натуральным числом. Следовательно, площадь треугольника ABC — натуральное число.

Аналогично можно рассмотреть другие случаи расположения данного треугольника.

2) Рассмотрим точки $O(0;\ 0)$, $A(1;\ 1)$, $B(0;\ 1)$, $M(x;\ y)$. Тогда приведенное условие означает, что $MA=MO=MB$. Следовательно, точка M равноудалена от вершин треугольника OAB. Можно доказать, что треугольник ABO прямоугольный с гипотенузой AO. Значит, M — середина отрезка AO; $x=0{,}5$, $y=0{,}5$.

61.8. 1) Указание. Задача решается аналогично задаче 61.7 (1).

2) Рассмотрим точки $O(0;\ 0)$, $A(0;\ 1)$, $B(1;\ 0)$, $C(-1;\ 1)$, $M(x;\ y)$. Тогда записанные в системе уравнения означают, что $MA=MB$ и $MO=MC$. Значит, точка M является точкой пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам OC и AB. Однако можно доказать, что эти серединные перпендикуляры не пересекаются. Поэтому система не имеет решений.

62.1. 2) $\sqrt{85}$. Указание. Введите систему координат, как показано на рисунке 290.

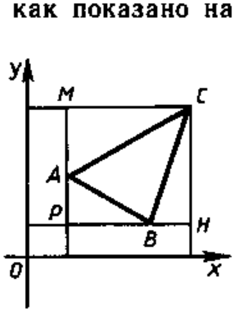

Рис. 289

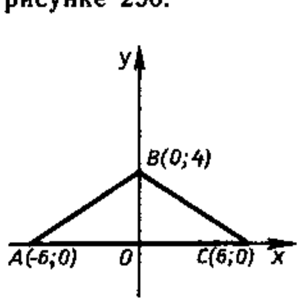

Рис. 290

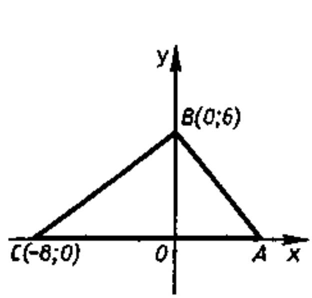

Рис. 291

62.2. 2) $\sqrt{241}$. Указание. Задача решается аналогично задаче 62.1 (2).

62.3. 1) а) Так как пары точек A и D, B и C имеют одинаковые ординаты, то прямые AD и BC параллельны оси ординат. Видно, что $AD \neq BC$, значит, четырехугольник $ABCD$ — трапеция.

б) По формуле длины отрезка устанавливаем, что $AB = DC$. Значит, четырехугольник $ABCD$ — равнобедренная трапеция, поэтому углы BAD и CDA равны.

2) $\sqrt{109}$. Указание. Введите систему координат, как показано на рисунке 291.

62.4. Указание. Задачи решаются аналогично задачам 62.3. 1) б) Да. 2) $\sqrt{53}$.

62.5. 1) По формуле длины отрезка устанавливаем $AB = 4$, $AC = 2$, $BC = 2\sqrt{3}$. Значит, $AB^2 = AC^2 + BC^2$, т. е. угол C прямой. Кроме того, $AC = 0{,}5\ AB$, следовательно, $\angle B = 30°$, $\angle A = 60°$.

2) Введем систему координат, как показано на рисунке 292. Из треугольника AOC находим $AO = 3$, $CO = 3\sqrt{3}$. Значит, $A(-3; 0)$, $B(1; 0)$, $C(0; 3\sqrt{3})$. Пусть M — середина стороны BC. Тогда $M\left(\frac{1}{2}; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$. По формуле расстояния между двумя точками находим $AM = \sqrt{19}$.

62.6. Задачи решаются аналогично задачам 62.5.
1) 45°, 45°, 90°. 2) $\sqrt{185}$.

62.7. Пусть $AD = a$, $AB = b$. Введем систему координат, как показано на рисунке 293. Можно доказать, пользуясь признаками подобия треугольников, что $K\left(\frac{2}{3}a; \frac{1}{3}b\right)$. Очевидно также, что $E\left(a; \frac{b}{2}\right)$, $\overrightarrow{AK}\left\{\frac{2}{3}a; \frac{1}{3}b\right\}$, $\overrightarrow{AE}\left\{a; \frac{b}{2}\right\}$. Следовательно, $\overrightarrow{AK} = 1{,}5\overrightarrow{AE}$. Значит, точка K принадлежит отрезку AE и делит его в отношении 1:2.

62.8. Пусть O — точка пересечения диагоналей ромба. Примем $OH = a$, $OD = b$ и введем систему координат, как показано на ри-

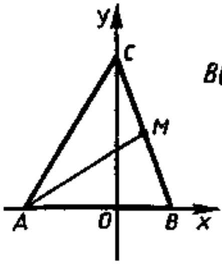

Рис. 292

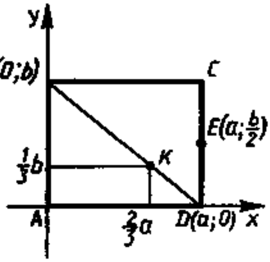

Рис. 293

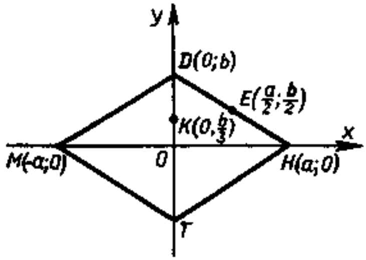

Рис. 294

сунке 294. Тогда $H(a; 0)$, $M(-a; 0)$, $K\left(0; \frac{b}{3}\right)$, $D(0; b)$, $E\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}\right)$, $\overrightarrow{MK}\left\{a; \frac{b}{3}\right\}$, $\overrightarrow{ME}\left\{\frac{3a}{2}; \frac{b}{2}\right\}$. Значит, $\overrightarrow{ME}=\frac{3}{2}\overrightarrow{MK}$, т. е. точка K принадлежит отрезку ME и делит его в отношении $2:1$.

63.1. 2) $(x+4)^2+(y-2)^2=25$. **63.2.** 2) $(x-2)^2+(y+4)^2=25$.

63.3. 2) $x^2+(y-3)^2=13$. **63.4.** 2) $(x-3)^2+y^2=13$.

63.5. $x^2+6x+y^2=x^2+6x+9+y^2-9$. Значит, уравнением данной линии будет $(x+3)^2+y^2=9$, а это — уравнение окружности с центром $(-3; 0)$ и радиусом 3. Можно вычислить, что середина отрезка AB имеет координаты $(-3; 0)$. Непосредственной подстановкой в уравнение убеждаемся, что точка A принадлежит окружности. Следовательно, отрезок AB является диаметром окружности.

63.6. Является. Указание. Задача решается аналогично задаче 63.5.

64.1. 3) Прямая и окружность не имеют общих точек.

64.2. 3) Прямая и окружность не имеют общих точек.

64.3. 1) Прямая пересекает оси координат в точках $A(-2; 0)$ и $B(0; -4)$. Пусть O — начало координат. Тогда в треугольнике AOB угол AOB прямой, $AO=2$, $BO=4$, площадь треугольника AOB равна 4.

2) Точка $A(2; -10)$ не принадлежит оси ординат. Так как прямая проходит через начало координат и не совпадает с осью Oy, то она имеет уравнение $y=kx$, где k — некоторое действительное число. Подставив координаты точки A в это уравнение, получим $k=-5$. Уравнение искомой прямой $5x+y=0$.

3) Имеют одну общую точку.

64.4. Указание. Задачи решаются аналогично задачам 64.3. 1) 6. 2) $4{,}5x-y=0$. 3) Имеют общую точку.

64.5. 1) Прямая $2x+y+4=0$ пересекается с прямой $x=-1$ в точке $A(-1; -2)$, а с осью абсцисс в точке $B(-2; 0)$. Пусть прямая $x=-1$ пересекает ось Ox в точке $C(-1; 0)$. Тогда надо найти площадь треугольника ABC, в котором угол C — прямой, $AC=1$, $BC=2$. Площадь $\triangle ABC$ равна 1.

2) Так как абсциссы точек A и B различны, прямая AB не параллельна оси ординат. Значит, ее уравнение можно записать в виде $y=kx+b$. Подставляем координаты точек A и B в это уравнение и получаем $10=k+b$, $-4=-k+b$, откуда $k=7$, $b=3$. Тогда уравнение прямой $7x-y+3=0$.

3) Решив систему двух уравнений $x^2+y^2=1$ и $x+y=1$, получаем, что данные окружность и прямая пересекаются в двух точках $A(0; 1)$, $B(1; 0)$. Пусть M — середина отрезка AB, O — начало координат. Тогда OM есть расстояние от центра окружности до прямой AB. Из треугольника AOM находим $OM=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Прямая и окружность имеют две общие точки.

64.6. Указание. Задачи решаются аналогично задачам 64.5. 1) 13,5. 2) $5x-8y-11=0$. 3) Имеют две общие точки; $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

64.7. Выберем систему координат так, чтобы точка A стала началом координат, а точка B имела координаты (4; 0). Пусть $M(x;\ y)$ есть произвольная точка, принадлежащая искомому множеству. Тогда $x^2+y^2+(x-4)^2+y^2=10$. После преобразований получаем $(x-2)^2+y^2=1$, т. е. искомое множество есть окружность с центром в середине отрезка AB и радиусом, равным 1.

64.8. Прямая, перпендикулярная AB и проходящая через точку M на отрезке AB, так, что $AM=2{,}5$.

65.3. 1) $25\sqrt{2}$ см^2. 2) $20\sqrt{3}$ см^2.

65.4. 1) $20\sqrt{3}$ см^2. 2) $15\sqrt{2}$ см^2.

65.5. 1) По формуле площади треугольника имеем $3=\frac{3\cdot 4}{2}\sin A$, значит, $\sin A=0{,}5$. Так как центр описанной вокруг треугольника ABC окружности лежит вне треугольника и угол A наибольший, то угол A тупой, значит, $\angle A=150°$.

2) Так как площадь произвольного выпуклого четырехугольника равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними и $AB=BD$, то искомая площадь равна $\frac{c^2\sqrt{2}}{4}$.

65.6. 1) 120°.

2) $\frac{a^2}{4}$. Указание. Угол между диагоналями находится с помощью теорем о внешнем угле треугольника. Далее задача решается аналогично задаче 65.5 (2).

65.7. Площадь треугольника ABC равна сумме площадей треугольников ABD и BDC. Значит, $0{,}5ab\sin\alpha=0{,}5a\,BD\sin\beta+$ $+0{,}5b\,BD\sin(\alpha-\beta)$, откуда получаем $BD=\frac{ab\sin\alpha}{a\sin\beta+b\sin(\alpha-\beta)}$.

65.8. $\frac{mn\sin\beta}{n\sin(\alpha+\beta)-m\sin\alpha}$.

66.3. 1) 28,8 см.

2) В треугольнике ABC применим теорему синусов $\frac{b}{\sin\beta}=\frac{BC}{\sin\alpha}$. Отсюда $BC=\frac{b\sin\alpha}{\sin\beta}$. По теореме о сумме углов треугольника найдем угол ACB. $\angle ACB=180°-\alpha-\beta$. Применяя теорему синусов к треугольнику BDC, найдем $BD=\frac{b\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta\sin\gamma}$.

66.4. 1) 13,3 см. 2) $\frac{m\sin\gamma}{\sin(\alpha+\beta)}$.

66.5. 1) 49,8 см^2. Указание. Вначале найдите BC, пользуясь теоремой синусов.

2) Пусть M — середина высоты BD. Тогда $BM=\frac{h}{2}$, $\angle EBM=\angle MBF=\frac{\beta}{2}$. $\angle BFE=180^\circ-(\alpha+\beta)$. Пользуясь теоремой синусов, получим из $\triangle EBM$ и $\triangle BMF$

$$EM=\frac{h\sin\frac{\beta}{2}}{2\sin\alpha},\quad MF=\frac{h\sin\frac{\beta}{2}}{2\sin(\alpha+\beta)}.$$

Тогда

$$EF=\frac{h\sin\frac{\beta}{2}}{2}\left(\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin(\alpha+\beta)}\right).$$

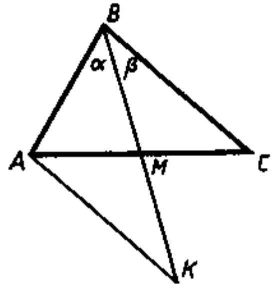

Рис. 295

После преобразований получили $EF=\frac{h\sin\beta\sin\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)}{2\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha}$.

66.6. 1) 344,2 см^2. 2) $\frac{2m\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta\sin\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)}$.

66.7. Продолжим медиану BM за точку M на ее длину (рис. 295): $BM=MK$, $\triangle BMC=\triangle KMA$, значит, $\angle AKB=\beta$. По теореме синусов найдем AB из треугольника ABK: $AB=\frac{2m\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.

66.8. $\frac{a\sin(\alpha+\beta)}{2\sin\alpha}$.

67.3. 1) 19,7. 2) 4 см. **67.4.** 1) 13,0. 2) 19,7 см.

67.5. 1) Найдем площадь и третью сторону треугольника. Тогда искомая высота равна частному от деления удвоенной площади на найденную сторону, $h=1{,}5$.

2) Пользуясь теоремой косинусов, найдем угол A треугольника, противолежащий стороне, равной 7,5 см. По формуле $\frac{a}{\sin A}=2R$ найдем R — радиус окружности, описанной около треугольника, $R=4{,}0$ см.

67.6. Указание. Задачи решаются аналогично задачам 67.5 (1, 2). 1) 4,9. 2) 3,2 см.

67.7. Пусть в треугольнике ABC углам A, B, C противолежат соответственно стороны a, b и c, R — радиус описанной окружности. Тогда $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ и $\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$. Значит,

$$4R^2\sin^2 C=4R^2\sin^2 A+4R^2\sin^2 B-2\cdot 2R\sin A\cdot 2R\sin B\cos C.$$
$$\sin^2 C=\sin^2 A+\sin^2 B-2\sin A\sin B\cos C.$$
$$1-\cos^2 C=1-\cos^2 A+\sin^2 B-2\sin A\sin B\cos C.$$
$$\cos^2 A=\cos^2 C+\sin^2 B-2\sin A\sin B\cos C.$$

67.8. Указание. Задача решается аналогично задаче 67.7.

68.1. 1) 0; 2; 2. 2) 48; 16°16′. **68.2.** 1) 0; 3; — 4. 2) 56; 30°31′.

68.3. 1) 0; 2. 2) -63; $165°45'$. **68.4.** 1) 0; -2. 2) -96; $163°44'$.

68.5. 1) Векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD}$ сонаправлены. Значит, $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}=8\cdot7=56$. Пусть O — точка пересечения прямых AB и CD. Из треугольника AOD находим, что угол AOD — прямой. Тогда угол между векторами AB и CD равен $90°$. Значит, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$.

2) $\overrightarrow{OA}\{x;\ -5\}$, $\overrightarrow{OB}\{x;\ x\}$, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x^2-5x$, $x^2-5x=-6$, $x_1=2$, $x_2=3$. Значит, $\overrightarrow{OA}\{2;\ -5\}$, $\overrightarrow{OB}\{2;\ 2\}$ или $\overrightarrow{OA}\{3;\ -5\}$, $\overrightarrow{OB}\{3;\ 3\}$. Угол между векторами $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ равен $113°12'$ или $104°2'$.

68.6. Указание. Задачи решаются аналогично задачам 68.5. 1) -15; 0. 2) $y=2$, $y=-3$; $107°6'$, $117°54'$.

68.7. 1) $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=CA\cdot CB\cos CAB$, значит, $\cos CAB<0$, т. е. угол CAB тупой. Центр расположен вне треугольника ABC.

2) Так как точка A лежит на оси Oy, то $A\,(0;\ y)$, $\overrightarrow{AC}\{6;\ 4-y\}$, $\overrightarrow{BD}\{3;\ -9\}$. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$. $18+9(y-4)=0$, $y=2$, $A\,(0;\ 2)$.

68.8. Указание. Задачи решаются аналогично задачам 68.7. 1) Внутри треугольника ABC. 2) $(1;\ 0)$.

69.1. 1) 7 см. Указание. Возведите равенство $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$ в квадрат.

2) Пусть ABC — равнобедренный треугольник с основанием AC, BM — его медиана; $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}$. Так как $\overrightarrow{AM}^2=\overrightarrow{MC}^2$, то $\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{BM}^2+2AB\cdot BM\cos ABM=\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{BC}^2+2MB\cdot BC\cos MBC$. Значит, $\triangle ABM=\triangle MBC$, так как $AB=BC$. Учитывая, что $\angle MBA+\angle MBC<180°$, получаем $\angle MBA=\angle MBC$.

69.2. 1) $\sqrt{5}$ см. Указание. Возведите равенство $\vec{m}=\vec{n}-\vec{k}$ в квадрат.

2) Пусть ABC — равнобедренный треугольник с основанием AC, BM — его медиана. $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})$, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(BC^2-BA^2)=0$. Значит, $BM\perp AC$.

69.3. 1) $120°$.

2) Пусть в треугольнике ABC отрезок BD является биссектрисой и высотой. Тогда $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AC}=0$, т. е. $\overrightarrow{BD}(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA})=0$, $BD\cdot BC\cos DBC-BD\cdot BA\cos ABD=0$. Так как углы DBC и ABD равны, получаем $BD\cos DBC\,(BC-BA)=0$, т. е. $BC=BA$.

69.4. 1) $135°$.

2) Пусть в треугольнике ABC BM — медиана и биссектриса. Тогда $\overrightarrow{AM}^2=\overrightarrow{MC}^2$, $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM})^2=(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC})^2$. $AB^2+BM^2+2AB\cdot BM\cos ABM=MB^2+BC^2+2BC\cdot BM\cos MBC$. Так как

$\cos ABM=\cos MBC$, то $AB^2-BC^2+2BM\cos MBC(AB-BC)=0$. $(AB-BC)(AB+BC+2BM\cos MBC)=0$. Учитывая, что $AB>0$, $BC>0$, $BM>0$, $\angle MBC<90°$, получаем $AB=BC$.

69.5. 1) $a^2=(3\vec{p}-\vec{k})^2=10$, $b^2=(\vec{p}+3\vec{k})^2=10$. Значит, $|\vec{a}|=|\vec{b}|$. Так как вектор $\vec{c}$ составляет с векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равные углы, то $\frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{c}|}=\frac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{b}|\cdot|\vec{c}|}$. Значит, $\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}$.

Пусть $\vec{c}=x\vec{p}+y\vec{k}$, где x и y — некоторые действительные числа. $\vec{a}\vec{c}=(3\vec{p}-\vec{k})(x\vec{p}+y\vec{k})=3x-y$. $\vec{b}\cdot\vec{c}=(\vec{p}+3\vec{k})(x\vec{p}+y\vec{k})=x+3y$. Значит, $3x-y=x+3y$, т. е. $x=2y$ (*). $\vec{c}^2=(x\vec{p}+y\vec{k})^2=x^2+y^2$. Учитывая, что $|\vec{c}|=\sqrt{5}$ и равенство (*), получаем $y=\pm1$, $x=\pm2$. Следовательно, $\vec{c}=-2\vec{p}-\vec{k}$, $\vec{c}=2\vec{p}+\vec{k}$.

2) $\overrightarrow{AA_1}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BB_1}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$,

$$\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{BB_1}=\frac{AC^2-2AB^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{4}.$$

С помощью теоремы косинусов получаем:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\cdot AC\cos BAC=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2}.$$

Значит, $\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{BB_1}=\frac{BC^2-5AB^2+AC^2}{8}=\frac{BC^2-BC^2-AC^2+AC^2}{8}=0$. Следовательно, медианы AA_1 и BB_1 взаимно перпендикулярны.

69.6. 1) $\vec{m}=-4\vec{a}+2\vec{b}$, $\vec{m}=4\vec{a}-2\vec{b}$.

2) $\overrightarrow{BB_1}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AA_1}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}$. Так как $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$, получаем $\overrightarrow{BB_1}\cdot\overrightarrow{AA_1}=\frac{1}{4}BC^2-\frac{1}{2}BA^2$. По теореме Пифагора $BA^2=$ $=AC^2-BC^2$. Значит, $\overrightarrow{BB_1}\cdot\overrightarrow{AA_1}=\frac{3}{4}BC^2-\frac{1}{2}AC^2=$
$=AC^2\left(\frac{3}{4}\frac{BC^2}{AC^2}-\frac{1}{2}\right)=AC^2\left(\frac{3}{4}\cos^2C-\frac{1}{2}\right)=0.$

69.7. 1) $\overrightarrow{CE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$.

$\overrightarrow{CE}^2=\frac{1}{9}\overrightarrow{CB}^2+\frac{4}{9}\overrightarrow{CA}^2+\frac{4}{9}CB\cdot CA\cos ACB=4$. $CE=2$ см.

2) $\overrightarrow{KP}\{-3;\ 3\}$, $\overrightarrow{KM}\{-1;\ 2\}$. $\cos K=\frac{\overrightarrow{KP}\cdot\overrightarrow{KM}}{KP\cdot KM}=\frac{3}{\sqrt{10}}$; $\sin K=$ $=\sqrt{1-\cos^2K}=\frac{1}{\sqrt{10}}$. Тогда площадь треугольника MKP равна $\frac{1}{2}KM\cdot KP\sin K$, т. е. равна $\frac{3}{2}$.

69.8. 1) $\frac{\sqrt{13}}{2}$ дм. 2) 2.

70.5. 1) Пусть такой n-угольник существует. Тогда $\frac{n-2}{n}180=$ $=145$, откуда получаем $n=10\frac{2}{7}$. Но этого быть не может, так как n — целое число. Следовательно, не существует правильного многоугольника, у которого каждый угол равен $145°$.

2) Угол правильного пятиугольника равен $108°$. Из равнобедренного треугольника ADE находим $\angle DAE=36°$. Значит, и $\angle BEA=36°$. Решая треугольник AOE, находим $AO=1{,}2$.

70.6. 1) Нет. 2) 3,2.

70.7. Шестиугольниками, треугольниками, квадратами.

70.8. Можно, например, шестиугольниками и треугольниками.

71.3. 2) Пусть x — радиус окружности, тогда сторона четырехугольника равна $2x$, а сторона треугольника $x\sqrt{3}$. Имеем $2x=x\sqrt{3}+\sqrt{3}$. Сторона четырехугольника равна $4\sqrt{3}+6$.

71.4. 2) $\frac{6\sqrt{6}+6}{5}$.

71.5. 1) Пусть $ABCDEP$ — искомый шестиугольник, O — его центр, OK — апофема, проведенная к стороне AB. Вначале построим равнобедренный треугольник ABO по его высоте. Затем достроим его до шестиугольника.

2) Отношение периметров двух данных многоугольников равно отношению их сторон. Пусть b_n — сторона описанного многоугольника, a_n — сторона вписанного многоугольника. Очевидно, $b_n>a_n$. Пусть $\frac{a_n}{b_n}=0{,}51$. Можно доказать, что $a_n=2R\sin\frac{180°}{n}$, $b_n=2R\operatorname{tg}\frac{180°}{n}$, где R — радиус окружности. Тогда $\frac{a_n}{b_n}=\cos\frac{180°}{n}$. При $n=3$ $\cos\frac{180°}{n}=0{,}5$, при $n=4$ $\cos\frac{180°}{n}=\frac{\sqrt{2}}{2}>0{,}51$, при $n>4$ $\cos\frac{180°}{n}>$ $>\frac{\sqrt{2}}{2}$. Следовательно, не существует таких натуральных значений n, при которых $\cos\frac{180°}{n}=0{,}51$.

71.6. 1) Пусть $ABCDEP$ — искомый шестиугольник. Вначале построим равнобедренный треугольник ABC с углом $120°$ при вершине. Затем достроим весь шестиугольник.

2) Так как данные многоугольники подобны, отношение их площадей равно квадрату отношения их сторон. Пусть b_n — сторона описанного многоугольника, a_n — сторона вписанного многоугольника. Тогда следует ответить на вопрос, возможно ли неравенство $\frac{b_n^2}{a_n^2}>4$ или $\frac{a_n}{b_n}<\frac{1}{2}$. Далее задача решается аналогично задаче 71.5(2). В результате получаем, что не может.

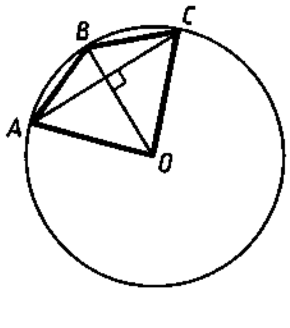

Рис. 296

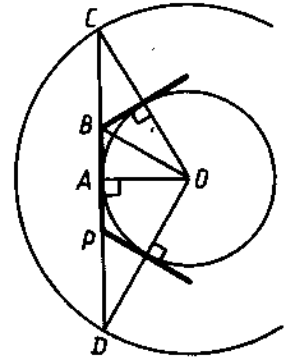

Рис. 297

71.7*. 1) На рисунке 296 AC — сторона n-угольника, BC — сторона $2n$-угольника, O — центр окружности. Тогда площадь четырехугольника $ABCDO$ равна $\frac{1}{2}BO \cdot AC$, а площадь треугольника ABO в 2 раза меньше, т. е. равна $\frac{1}{4}BO \cdot AC$. Следовательно, площадь $2n$-угольника равна $2n\frac{1}{4}BO \cdot AC = \frac{na_nR}{2}$.

2) Дан правильный шестиугольник $ABCDEP$, точка M внутри его. Пусть b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6 — расстояния от точки M до прямых AB, BC, CD, DE, EP, PA соответственно. Тогда площадь шестиугольника равна сумме площадей треугольника AMB, BMC, CMD, DME, EMP, PMA или $0{,}5b_1AB + 0{,}5b_2BC + 0{,}5b_3CD + 0{,}5b_4DE + 0{,}5b_5EP + 0{,}5b_6PA$. Учитывая условие задачи, получаем, что площадь шестиугольника равна $\sqrt{3}\,(b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6)$. С другой стороны, площадь шестиугольника равна $\frac{3\sqrt{3}}{2}AB^2$ или $18\sqrt{3}$ см^2, откуда получаем, что искомая сумма равна 18 см.

71.8*. 1) Отношение периметров n-угольника и $2n$-угольника равно половине отношения их сторон. На рисунке 297 BP — сторона $2n$-угольника, DC — сторона n-угольника, OC и OA соответственно радиусы большой и малой окружностей. Можно доказать, что $\angle BOA = \angle BOC$. Тогда, применяя теорему о биссектрисе угла треугольника к треугольнику AOC, получим $\frac{AC - AB}{AB} = \frac{OC}{OA}$. Значит, $\frac{AC}{AB} = x + 1$. Учитывая, что $DC = 2AC$, $BP = 2AB$, находим, что $\frac{DC}{BP} = x + 1$. Значит, искомое отношение равно $\frac{x+1}{2}$.

2) Пусть $ABCDEP$ — вписанный шестиугольник, M — произвольная точка окружности. Тогда треугольники PMC, AMD и

BME прямоугольные, так как их соответствующие углы при вершине M вписаны и опираются на диаметр. Поэтому $MP^2+MC^2=PC^2=4$, $MA^2+MD^2=4$, $MB^2+ME^2=4$, откуда получаем, что MP^2+MC^2+ $+MA^2+MD^2+MB^2+ME^2=12$.

72.5. 1) Пусть a — искомый радиус, b и c — радиусы данных окружностей. Тогда $2\pi a=2\pi b+2\pi c$, откуда $a=b+c$, следовательно, $a=58$ см.

2) Пусть O — центр окружности, AB — хорда. Радиус OA найдем из формулы длины окружности. Решая треугольник AOB, найдем угол AOB. Далее по формуле длины дуги найдем искомую длину, она равна 9,7 см.

72.6. 1) 22 см. 2) 58,6 см.

72.7. Проведем отрезки OA, OM, OB (рис. 298). Тогда угол AOB является вписанным в первую окружность и опирается на диаметр AB. $OM\perp AB$ по свойству касательной. Значит, радиус второй окружности OM будет высотой, проведенной из вершины прямого угла треугольника AOB. Следовательно, $OM=\sqrt{mn}$, а длина второй окружности равна $2\pi\sqrt{mn}$.

72.8. Пусть O_1 и O_2 — центры малой и большой окружностей (рис. 299). Тогда прямая O_1A перпендикулярна к общей касательной двух окружностей и, следовательно, проходит через точку O_2. Таким образом, отрезки AD и AE являются диаметрами окружностей, а треугольники ABD и ACE — подобными прямоугольными треугольниками. При этом $AB:AC=AD:AE$. Значит, отношение диаметров окружностей с центрами O_1 и O_2 равно x, следовательно, искомое отношение также равно x.

73.3. 1) 95,4 см.

2) Треугольник AOB равносторонний, следовательно, угол AOB равен 60°. Искомая площадь равна разности площадей сектора с дугой AB и треугольника AOB. Выполнив вычисления, получим $100\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ см^2.

73.4. 1) 25,5 см. 2) $64\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ м^2.

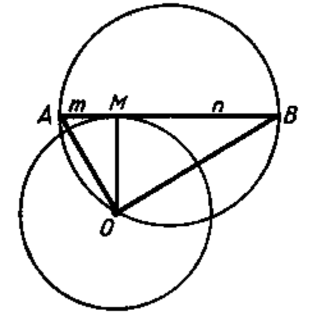

Рис. 298

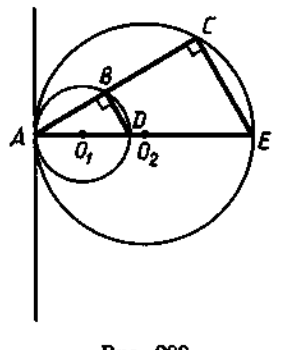

Рис. 299

73.5. 1) Уменьшится в 21 раз.

2) Решая треугольник AOB, найдем $\angle AOB$. Искомую площадь находим как разность площадей сектора с дугой AB и треугольника AOB. Она равна 3,1 м^2.

73.6. 1) Увеличится в 361 раз. 2) 36,3 см^2.

73.7. Отметим точку O — центр полукруга и проведем прямую BC. Так как $BC \parallel AD$, площади треугольников ABC и OBC равны. Значит, площадь заштрихованной фигуры равна площади сектора с дугой BC. Градусная мера дуги BC равна 120°. Следовательно, искомая площадь равна $\frac{2}{3}$ площади полукруга, т. е. $\frac{2}{3}Q$.

73.8. $2Q$.

74.1. 2) Рассмотрим вертикальные углы AOD и COB, образованные при пересечении прямых AB и CD. Пусть при движении $A \to A_1$, $B \to B_1$, $C \to C_1$, $D \to D_1$, $O \to O_1$. Тогда угол AOD отображается на угол $A_1O_1D_1$, а угол COB — на угол $C_1O_1B_1$, так как при движении угол отображается на угол. Докажем, что углы $A_1O_1D_1$ и $C_1O_1B_1$ вертикальные. Для этого достаточно доказать, что отрезки A_1B_1 и C_1D_1 имеют общую точку O_1.

При движении отрезок отображается на отрезок. Значит, общая точка O отрезков AB и CD отображается на общую точку O_1 отрезков A_1B_1 и C_1D_1. Следовательно, углы $A_1O_1D_1$ и $C_1O_1B_1$ вертикальные, образованные при пересечении прямых A_1B_1 и C_1D_1.

74.2. 2) Рассмотрим смежные углы AOB и COB. Пусть при движении $A \to A_1$, $B \to B_1$, $C \to C_1$, $O \to O_1$. Тогда угол AOB отображается на угол $A_1O_1B_1$, а угол COB — на угол $C_1O_1B_1$, так как при движении угол отображается на угол. Докажем, что углы $A_1O_1B_1$ и $C_1O_1B_1$ смежные. При движении отрезок отображается на отрезок, прямая — на прямую. Значит, точка O, лежащая на отрезке AC, отображается на точку O_1, лежащую на отрезке A_1C_1, а точка B, не лежащая на прямой AC, отображается на точку B_1, не лежащую на прямой A_1C_1. Следовательно, углы $A_1O_1B_1$ и $C_1O_1B_1$ смежные.

74.3. 2) Рассмотрим два подобных ромба $ABCD$ и $MPHK$, в которых $\angle ABC = \angle MPH$. Пусть при движении $A \to A_1$, $B \to B_1$, $C \to C_1$, $D \to D_1$, $M \to M_1$, $P \to P_1$, $H \to H_1$, $K \to K_1$. Так как при движении четырехугольник отображается на четырехугольник, углы и расстояния сохраняются, то четырехугольники $A_1B_1C_1D_1$ и $M_1P_1H_1K_1$ будут ромбами, в которых $\angle A_1B_1C_1 = \angle M_1P_1H_1$. Значит, при движении подобные ромбы отображаются на подобные ромбы.

74.4. 1) Рассмотрим два подобных прямоугольника $ABCD$ и $MPHK$, в которых $\frac{AB}{PM} = \frac{BC}{PH}$. Пусть при движении $A \to A_1$, $B \to B_1$, $C \to C_1$, $D \to D_1$, $M \to M_1$, $P \to P_1$, $H \to H_1$, $K \to K_1$. Так как при движении четырехугольник отображается на четырехугольник, расстояния и углы сохраняются, то четырехугольники

$A_1B_1C_1D_1$ и $M_1P_1H_1K_1$ будут прямоугольниками, в которых $\frac{A_1B_1}{P_1M_1}=\frac{B_1C_1}{P_1H_1}$. Значит, при движении подобные прямоугольники отображаются на подобные прямоугольники.

74.5. 2) Так как при движении отрезок отображается на отрезок, то точка H принадлежит отрезку EP; $EP=12$ см, так как при движении длина отрезка сохраняется. Возможны два случая:

1. При движении $A \to E$, $B \to P$. Тогда $AM=EH$ по свойству движений.

2. При движении $A \to P$, $B \to E$. Тогда $AM=HP$ и $EH=EP=AM$.

Поэтому AE равно 2 см или 10 см.

74.6. 2) Очевидно, что точка T принадлежит отрезку EP и $MH=EP$. Возможны два случая:

1. При движении $M \to E$, $H \to P$. Тогда $MK=ET$.

2. При движении $M \to P$, $H \to E$. Тогда $MK=TP$.

Поэтому $ET:EP$ как 3:5 или как 2:5.

75.1. 2) Рассмотрим правильный шестиугольник $ABCDEP$ с центром O и поворот вокруг точки O на угол 60°. Для определенности будем рассматривать поворот в направлении обозначения вершин шестиугольника. По определению поворота $A \to B$, $B \to C$, $C \to D$, $D \to E$, $E \to P$, $P \to A$. Так как при движении отрезок отображается на равный ему отрезок, при данном повороте стороны шестиугольника отобразятся на стороны шестиугольника, т. е. шестиугольник отобразится на себя.

75.2. При параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{AB}$ точка A отобразится на точку B, а точка B — на точку, лежащую на прямой AB. Так как при движении прямая отображается на прямую и через две точки проходит только одна прямая, то при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{AB}$ прямая AB отображается на себя.

75.3. 1) Указание. При данном параллельном переносе точка D перейдет в точку, которая одновременно принадлежит прямым BC и BD, т. е. в точку B. Значит, надо построить точку, в которую перейдет точка A при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{DB}$.

2) При данном повороте отрезок AC отображается на отрезок BC, прямая PK — на прямую MH, так как $\angle HOK=\angle AOC=\angle BOC=120°$. Значит, точка K перейдет в точку H, точка P — в точку M. Следовательно, отрезок KP отобразится на отрезок MH.

75.4. 1) Центр поворота — точка O должна удовлетворять двум условиям: а) $AO=OB=OC$; б) $\angle AOB=\angle BOC$. Такой точкой в равнобедренном прямоугольном треугольнике ABC является середина гипотенузы.

2) Так как хорды AB и CD равноудалены от центров окружностей одинакового радиуса, то $AD \parallel OO_1$. При движении окружность отображается на окружность равного радиуса. Значит, при параллельном переносе $A \to C$, $B \to D$. Следовательно, отрезок AB отображается на отрезок CD.

75.5. 1) Из условия задачи следует, что $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{EM}$. Значит, четырехугольник $BDME$ — параллелограмм. Следовательно, чтобы отметить искомые точки, нужно через точку M провести прямые, параллельные сторонам угла ABC.

2) Заметим, что если поворот является центральной симметрией, то точки A, B, C, D могут лежать на одной прямой, которой будет принадлежать и центр симметрии. Если поворот не является центральной симметрией, то точки A, B, C, D не лежат на одной прямой. В самом деле, если в этом случае точки A, B, C, D лежат на одной прямой, то будут выполняться равенства $OA=OB$, $OC=OD$, где O — центр поворота. Поскольку серединные перпендикуляры отрезков AB и CD, не лежащих на одной прямой, не пересекаются, то записанные равенства возможны, если середины отрезков AB и CD совпадают. Но тогда $\angle ADB \neq \angle COD$. Следовательно, условие задачи выполняется при угле поворота, равном 180°.

75.6. 1) Обозначим данные прямые через a и b. Для определенности будем считать, что поворот на угол 70° относительно центра O совершается против часовой стрелки. Пусть при этом повороте $a \to a_1$. Построим прямую a_1 и отметим точку C пересечения прямых a_1 и b. Отметим точку D_1, которая получается при повороте относительно центра O на угол 70° по часовой стрелке из точки C. Так как $C \in a_1$, $D \in a$, C и D будут искомыми точками. Другое расположение искомых точек на прямых a и b можно получить, рассмотрев случай, когда одна из этих точек будет пересечением b и b_1, где $b \to b_1$ при повороте относительно центра O на угол 70° против часовой стрелки. Задача может и не иметь решения, если прямая a_1 не пересекает b, а b_1 не пересекает a. Задача имеет бесконечное множество решений в случае, если a_1 совпадает с b или b_1 совпадает с a.

2) Пусть некоторая фигура переходит в себя при параллельном переносе на вектор $\vec{a}$. Тогда при параллельном переносе на вектор $n\vec{a}$ (n — целое число) фигура также перейдет в себя. Докажем теперь, что не существует круга, внутри которого лежала бы данная фигура. Пусть такой круг существует. Отметим произвольную точку A, принадлежащую фигуре, и проведем из точки A луч, сонаправленный вектору $\vec{a}$. Пусть B — точка пересечения этого луча с окружностью. Тогда при параллельном переносе на вектор $\left(\left[\frac{AB}{\vec{a}}\right]+1\right)\vec{a}$ точка A перейдет в точку, лежащую вне круга, что противоречит тому, что фигура должна переходить в себя. Значит, не существует круга, внутри которого лежала бы данная фигура.

76.1. 1) Рассмотрим центральную симметрию относительно точки O. При этом движении $A \to C$, $B \to D$, отрезок AB в отрезок DC. Значит, середина отрезка AB — точка M отображается на середину отрезка DC — точку H, поэтому O — середина отрезка MH.

2) Пусть две параллельные прямые a и b пересечены секущей AB в точках A и B соответственно, причем $a \perp AB$. Рассмотрим параллельный перенос на вектор $\overrightarrow{AB}$. При этом движении прямая a отображается на прямую b, а прямая AB — на саму себя, так как при движении углы сохраняются, то $b \perp AB$.

76.2. 1) Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC с основанием AC, медианами AA_1 и CC_1 и высотой BK. При осевой симметрии относительно BK точка B перейдет сама в себя, а точка A — в точку C. Тогда середина отрезка AB — точка C_1 перейдет в середину отрезка CB — точку A_1. Значит, отрезок AA_1 отобразится на отрезок CC_1. Следовательно, $AA_1 = CC_1$.

2) Рассмотрим окружность с центром O. Пусть дуги AB и CD этой окружности равны. Тогда $\angle AOB = \angle COD$, а значит, $\angle AOC = \angle BOD$. Рассмотрим поворот вокруг точки O на угол AOC, при котором $A \to C$. При этом движении $B \to D$. Значит, $AB = CD$.

76.3. 1) Рассмотрим центральную симметрию относительно точки пересечения диагоналей параллелограмма. При этом движении отрезок AD отображается на отрезок BC, прямая MH — на себя, точка D — на точку B. Следовательно, $H \to M$ и $DH = BM$.

2) Пусть a и b — данные параллельные прямые. Сначала построим произвольную окружность, касающуюся прямых a и b, и проведем через точку A прямую c, параллельную прямой a. Пусть B — одна из двух точек пересечения прямой c и построенной окружности. Искомая окружность получается из построенной параллельным переносом на вектор $\overrightarrow{BA}$. Задача имеет два решения в зависимости от выбора точки B.

76.4. 1) Пусть в окружность вписана трапеция $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Рассмотрим симметрию относительно прямой, проходящей через центр окружности перпендикулярно основаниям трапеции. При этой симметрии окружность, а также прямые AB и CD отображаются на себя. Значит, точка A отображается на точку B, точка C — на точку D. Следовательно, $AC = BD$.

2) Выполним поворот относительно центра A на угол 90° по часовой стрелке (для определенности). При этом повороте прямая c отобразится на прямую c_1 и пересечет ее в точке B. При повороте относительно центра A на угол 90° против часовой стрелки прямая b отобразится на прямую b_1, которая пересечет прямую c в точке C. Треугольник ABC искомый. Задача имеет единственное решение для данного направления поворота.

76.5. 1) Через центр квадрата $ABCD$ проведены две взаимно перпендикулярные прямые MH и KP, пересекающие стороны AB, BC, CD, AD в точках K, M, P и H соответственно. Рассмотрим поворот относительно центра квадрата на угол 90°, при котором точка C отображается на точку B. При этом повороте прямая KP отобразится на прямую MH, отрезок CD — на отрезок BC, отрезок AB — на отрезок AD. Значит, точка M перейдет в точку K, точка H — в точку P. Следовательно, $KP = MH$.

2) При симметрии относительно прямой c точка B переходит в точку A. Построим прямую b_1, симметричную прямой b относительно прямой c. Точка пересечения прямых a и b_1 будет точкой A. Далее восстанавливаем треугольник ABC по оси симметрии c и вершине A.

76.6. 1) При параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{O_1O_2}$ окружность с центром O отобразится на окружность с центром O_2, а прямая AB отобразится на себя. Значит, точка A перейдет в точку C, точка B — в точку D. Следовательно, $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{O_1O_2}$, откуда $BD = O_1O_2$.

2) При центральной симметрии относительно точки O точка D перейдет в точку B. Построим прямую, симметричную прямой, содержащей луч n, относительно точки O. Точка пересечения построенной прямой и луча m будет точкой B. По точкам B и O можно восстановить квадрат $ABCD$.

77.1. 1) б) 6; в) $HB_1 = \frac{9}{4}$, $B_1C_1 = \frac{15}{4}$.

77.2. 1) б) $\sqrt{3}$; в) 30°, 60°, 90°.

77.3. 1) б) BH меньше A_1B_1. **77.4.** 1) б) 6.

77.5. 1) б) Можно доказать, что $AD \parallel CB$. Высота треугольника ABD, проведенная из вершины B, равна высоте треугольника CBD, проведенной из вершины D, значит, площади этих треугольников относятся как $AD:BC$. Треугольники AOD и BOC подобны, поэтому $AD:BC = b:a$.

в) Можно доказать, что треугольники MOC и BOH равны, значит, $MO = OH$. Кроме того, $\angle COB + \angle COM + \angle MOA = 180°$ и $\angle BOH = 0{,}5\angle BOD = 0{,}5\angle AOC = \angle MOA$. Следовательно, $\angle BOH + \angle COB + \angle COM = 180°$, т. е. точки M, O, H лежат на одной прямой.

г) По теореме о внешнем угле треугольника $\angle AOD = \frac{\alpha}{2}$. Пусть OH — высота треугольника AOD, M — центр вписанной в треугольник AOD окружности. Тогда из треугольника AOD $AH = b\cos\frac{\alpha}{2}$, а из треугольника AMH $MH = b\cos\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}$. Чтобы найти радиус окружности, описанной около треугольника BOC, воспользуемся формулой $\frac{c}{\sin C} = 2R$, где c — сторона треугольника, противолежащая углу C, R — радиус описанной окружности. Тогда искомый радиус равен $\frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$.

2) У к а з а н и е. Стороны искомого треугольника и начерченного относятся как 4:3.

77.6. 1) б) Так как треугольники OKM и OPH равны, отношение их периметров равно 1.

в) Можно доказать, что треугольники KOH и MOP подобны, причем $\frac{OH}{OM}=\frac{KH}{MP}$. Так как $AH:KH=MB:MP$, получаем, что $\frac{OH}{OM}=\frac{AH}{MB}$. Учитывая, что углы AHO и BMO равны, доказываем, что треугольники AOH и MOB подобны. Из подобия этих треугольников следует, что $\angle AOH=\angle MOB$. Далее можно доказать, что углы AOH и MOB вертикальные, а значит, точки A, B, O лежат на одной прямой.

г) $a\cos\alpha \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, $\frac{b}{2\sin\alpha}$.

2) Указание. Стороны искомого треугольника и начерченного относятся как 2:3.

78.1. б) 20 см^2. **78.2.** б) 48 см^2.

78.3. б) 2,4 см. Указание. Радиус окружности, вписанной в ромб, равен половине его высоты.

78.4. б) 4,8 см. Указание. Радиус окружности, вписанной в ромб, равен половине его высоты.

78.5. а) Рассмотрим поворот на угол 90° относительно центра квадрата, при котором $T\to H$. При этом движении прямая KT отображается на прямую PH, прямая AD — на прямую CD, прямая BC — на прямую BA. Значит, $K\to P$. Следовательно, $TK=PH$, откуда можно доказать, что четырехугольник $PKHT$ — квадрат.

б) Для определенности будем считать угол α острым. Тогда опустим перпендикуляр TM из точки T на прямую BC. $TM=CD=BC=a$. Из треугольника KTM находим $KT=\frac{a}{\sin\alpha}$. Значит, площадь квадрата $PKHT$ равна $\frac{a^2}{2\sin^2\alpha}$.

78.6. а) При симметрии относительно точки O прямая DC отображается на прямую AB, а прямая KM — на себя, т. е. $K\to M$, значит, $KO=OM$. Аналогично получаем, что $PO=OH$. Так как в четырехугольнике $APOM$ сумма углов равна 360°, то $\angle AMO=90°$. Следовательно, отрезки PH и KM — высоты ромба, а потому $PH=KM$. Значит, в четырехугольнике $MHKP$ диагонали равны и в точке пересечения делятся пополам. Отсюда следует, что этот четырехугольник — прямоугольник.

б) $\frac{a^2}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$. Указание. Найдите угол OPK.

79.3. 1) 150°, 120°, 90°.

2) Пусть точки K и M — середины сторон AB и AC соответственно, O — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Тогда KO и OM являются серединными перпендикулярами к сторонам AB и AC. Значит, $AK=11$ см, $AM=8$ см, $AO=12$ см.

Решая прямоугольные треугольники AKO и AMC, найдем углы KAO и MAO, а затем и угол BAC, он равен $71°45'$.

79.4. 1) $45°$, $45°$, $90°$. 2) $7°24'$.

79.5. 1) $13:12:11$. Указание. Сначала найдите градусные меры соответствующих дуг, а затем воспользуйтесь формулой длины дуги.

2) Воспользуемся формулой $\frac{BC}{\sin A}=2R$, где R — радиус окружности, описанной около треугольника ABC, и найдем $\angle BAC$. Затем по теореме о сумме углов треугольника вычислим угол BCA. Искомые углы равны $41°49'$, $113°11'$ или $138°11'$, $16°49'$.

79.6. 1) $50°$, $60°$, $70°$. 2) $125°19'$, $38°41'$ или $22°41'$, $141°19'$.

80.1. 2) $\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. 3) $x^2+y^2=18$. 4) $33°41'$. Указание. Воспользуйтесь скалярным произведением векторов.

80.2. 1) $(6; 9)$. 2) $(x-7)^2+(y-5)^2=34$.

3) $\overrightarrow{OE}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$.

4) $18°26'$. Указание. Воспользуйтесь скалярным произведением векторов.

80.3. 1) $\overrightarrow{CA}\{-8; 8\}$, $\overrightarrow{CB}\{6; 6\}$, $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=-8\cdot 6+8\cdot 6=0$, значит, треугольник ABC прямоугольный с прямым углом C.

2) Треугольник ABC прямоугольный, поэтому точка O является серединой стороны AB. Значит, $\overrightarrow{CO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$.

3) $(x-1)^2+(y-9)^2=50$.

4) $36°52'$. Указание. Воспользуйтесь скалярным произведением векторов.

80.4. 1) $\overrightarrow{BA}\{2; 4\}$, $\overrightarrow{BC}\{4; -2\}$, $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=2\cdot 4+4(-2)=0$, $|\overrightarrow{BA}|=|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{20}$, значит, четырехугольник $ABCD$ — квадрат.

2) $\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$. 3) $(x-1)^2+(y-3)^2=10$.

4) $26°34'$. Указание. Воспользуйтесь скалярным произведением векторов.

80.5. 1) $K(2; 1)$, $AK=\sqrt{(-4-2)^2+(0-1)^2}=\sqrt{37}$.

2) Анализируя значения координат точек A, B, C, можно доказать, что треугольник ABC равнобедренный, причем его ось симметрии совпадает с осью ординат. Следовательно, точка O лежит на оси ординат и имеет координаты $(0; y)$, $OA=OC$. Значит, $\sqrt{(0+4)^2+(y-0)^2}=\sqrt{(0-0)^2+(y-2)^2}$, откуда получаем $y=-3$ и $OA=5$. Уравнение окружности: $x^2+y+3^2=25$.

3) Пусть P — начало координат. Тогда $OP:OC=3:5$, $\overrightarrow{OC}=\frac{5}{3}\overrightarrow{OP}$. Однако $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$, поэтому $\overrightarrow{OC}=\frac{5}{6}\overrightarrow{OA}+\frac{5}{6}\overrightarrow{OB}$.

4) $10°18'$. Указание. Воспользуйтесь скалярным произведением векторов.

80.6. 1) $M(4{,}5;\ 6)$, $CM=\sqrt{(0-4{,}5)^2+(-12-6)^2}=\frac{\sqrt{1377}}{2}$.

2) Анализируя значения координат точек A, B, C, можно доказать, что треугольник ABC равнобедренный, причем его основание AC принадлежит оси ординат. Вычислим $AC=24$, $AB=15$, $BC=15$; расстояние от точки B до прямой AC равно 9. По формуле $r=\frac{2S}{P}$, где r — радиус окружности, вписанной в треугольник, P — периметр треугольника, а S — площадь треугольника, находим $r=4$. Тогда искомое уравнение окружности будет иметь вид $(x-2)^2+y^2=16$.

3) Пусть K — начало координат. $OB:OK=\frac{5}{4}$, $\overrightarrow{OB}=-\frac{5}{4}\overrightarrow{OK}$,

$OK=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OB}=-\frac{5}{8}\overrightarrow{OA}-\frac{5}{8}\overrightarrow{OC}$.

4) $36°52'$. Указание. Воспользуйтесь скалярным произведением векторов.

81.3. 2) Обозначим данную прямую через a, данную точку через A. Прямые AB и AC проходят через точку A (точки B и C принадлежат прямой a). В задаче 81.1 (2) было доказано, что любая из прямых, пересекающая прямую a и проходящая через точку A, а также прямые AB и AC лежат в плоскости ABC. Значит, все прямые, проходящие через точку A и пересекающие прямую a, лежат в одной плоскости.

81.4. 2) Через две данные пересекающиеся прямые проходит плоскость α. Каждая из прямых, пересекающая данные прямые и не проходящая через точку A, имеет с плоскостью α две общие точки. Значит, все эти прямые лежат в плоскости α.

81.5. 1) а) Искомая точка есть точка T пересечения прямых MH и AD.

б) Искомая линия есть прямая TC.

2) Точки A, B, C есть общие точки плоскостей α и β. Значит, плоскости α и β имеют общую прямую, которой принадлежат точки A, B, C. Следовательно, точка C лежит на прямой AB.

81.6. 1) а) Искомая точка есть точка T пересечения прямых MH и AC.

б) Искомая линия есть прямая TB.

2) Так как прямая a пересекает плоскость β в точке M, то $M\in\beta$. В то же время $M\in\alpha$, потому что прямая a лежит в плоскости α. Значит, точка M принадлежит одновременно и плоскости α, и плоскости β. Следовательно, эта точка принадлежит прямой b, по которой пересекаются плоскости α и β.

81.7. В треугольнике ABC угол C прямой. Точки A, B и O лежат на одной прямой. Через эту прямую можно провести плоскость, в которой точка C не лежит. Поэтому точка C не всегда лежит в плоскости ABO.

81.8. Не всегда.

82.1. 1) 48 см. 2) Скрещиваются. **82.2.** 1) 20 дм. 2) Скрещиваются.

82.3. 1) 18 см. 2) Скрещиваются. **82.4.** 1) 16 дм, 32 дм. 2) Скрещиваются.

82.5. 1) Так как прямая a параллельна прямой b и прямая c параллельна прямой a, то прямые b и c параллельны. Предположим, что прямая c не лежит в плоскости α, а пересекает ее, тогда и прямая b пересекает плоскость α, так как если одна из двух параллельных прямых пересекает данную плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость. Однако по условию задачи прямая b лежит в плоскости α.

2) По признаку скрещивающихся прямых прямые KH и OP скрещиваются. Значит, точки K, H, O, P не лежат в одной плоскости. Поэтому прямые OK и PH не лежат в одной плоскости, а значит, скрещиваются.

82.6. 1) Если $a \parallel b$, $b \parallel c$, то $a \parallel c$. По условию задачи прямая a пересекает плоскость α, значит, и прямая c пересекает плоскость α, поэтому лежать в ней не может.

2) Скрещиваются.

82.7. Пусть E, P, K, H, O, M являются соответственно серединами отрезков AB, CD, AC, BD, BC. Можно доказать, что четырехугольник $EHPK$ является параллелограммом. Значит, отрезки EP и HK пересекаются и в точке пересечения делятся пополам. Аналогичное утверждение можно доказать и для отрезков EP и OM. Значит, прямые OM, EP, HK проходят через одну точку.

82.8. Указание. Задача решается аналогично задаче 82.7.

83.3. 1) 4. 2) Прямые могут быть параллельными или скрещивающимися.

83.4. 1) 5. 2) Прямые могут быть пересекающимися, скрещивающимися, параллельными.

83.5. 1) Указание. Докажите, что четырехугольник $PKHM$ является параллелограммом.

2) Можно доказать, что прямые EH и KM параллельны. Значит, плоскости PEH и PKM пересекаются по прямой, параллельной прямым EH и KM, проходящей через точку P.

83.6. Указание. Задачи решаются аналогично задачам 83.5.

84.1. 2) 5 см. **84.2.** 2) 14 см. **84.3.** 2) 3 см. **84.4.** 2) 5 см.

84.5. 1) Возможны два случая: точка K лежит между плоскостями α и β и точка K не лежит между плоскостями α и β. В каждом из случаев находим искомые отрезки из подобия треугольников KA_1A_2 и KB_1B_2. Получаем $KA_1=3$ см, $KB_2=16$ см или $KA_1=21$ см, $KB_2=16$ см. 2) Нет.

84.6. 1) 1,5 см и 7,5 см или 3 см и 7,5 см. 2) Нет.

84.7. Если данные прямые параллельные или пересекающиеся, то проведем через них плоскость. В этой плоскости $A_1A_2 \parallel B_1B_2 \parallel C_1C_2$. Используя признаки подобия треугольников, можно доказать требуемое равенство. Если данные прямые скрещиваются, то проведем через точку A_1 прямую, параллельную прямой A_2C_2. Пусть эта пря-

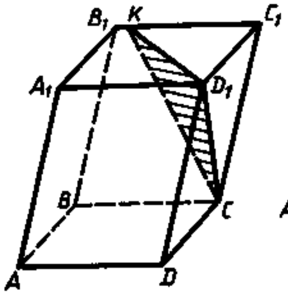

Рис. 300

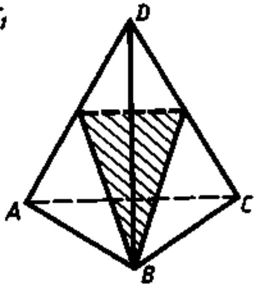

Рис. 301

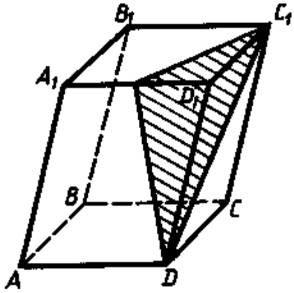

Рис. 302

мая пересекает плоскость β и γ в точках B_3, C_3 соответственно. Тогда $A_1B_3:B_3C_3=A_1B_1:B_1C_1$ и $A_1B_3:B_3C_3=A_2B_2:B_2C_2$. По доказанному выше прямые A_1C_1 и A_1C_3 пересекаются, а прямые A_1C_1 и A_2C_2 параллельны. Значит, $A_1B_1:B_1C_1=A_2B_2:B_2C_2$.

84.8. Указание. Задача решается аналогично задаче 84.7.

85.1. 1) Рис. 300. 2) Рис. 301.

85.2. 1) Рис. 302. 2) Рис. 303.

85.3. 1) Рис. 304. 2) Рис. 305.

85.4. 1) Рис. 306. 2) Рис. 307.

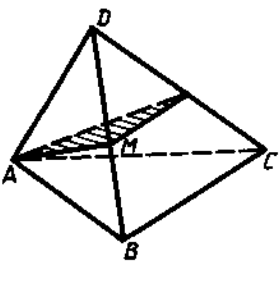

Рис. 303

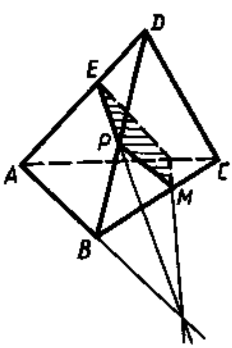

Рис. 304

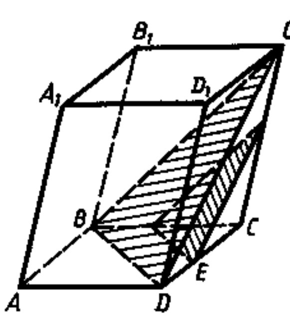

Рис. 305

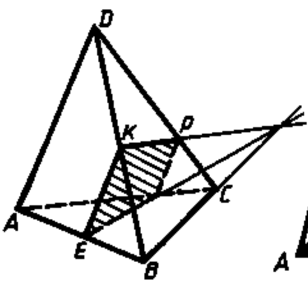

Рис. 306

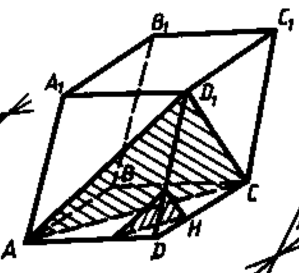

Рис. 307

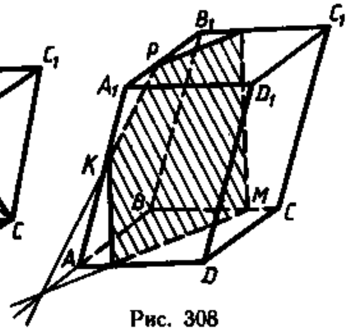

Рис. 308

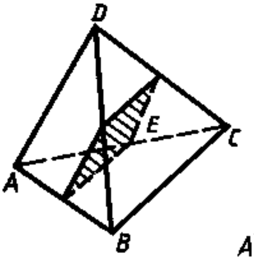

Рис. 309

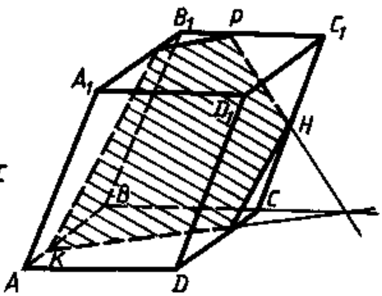

Рис. 310

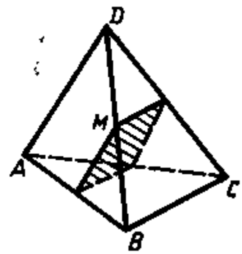

Рис. 311

85.5. 1) Рис. 308. 2) Рис. 309. Сечением является параллелограмм.

85.6. 1) Рис. 310. 2) Рис. 311. Сечением является параллелограмм.

85.7. Искомое сечение изображено на рисунке 312. Вначале строим прямую ME, параллельную боковому ребру параллелепипеда. X — общая точка плоскостей сечения и основания, так как принадлежит одновременно прямым MP и ED. Точка T строится как пересечение прямых KX и DC. Отрезки HM и MO строятся, исходя из параллельности противоположных граней параллелепипеда. В случае, если прямые MP и ED не пересекутся, прямая KT проводится параллельно прямой MP.

85.8. Искомое сечение изображено на рисунке 313. Вначале строим прямые ME и PT, параллельные боковым ребрам параллелепипеда, X — общая точка плоскостей сечения и основания, так как принадлежит одновременно прямым MP и ET. Точки O и Y получаем как пересечение прямой XK с ребрами AB и DC соответственно. Отрезок YH строится, исходя из того что противоположные грани параллелепипеда параллельны. В случае, если прямые MP и ET не пересекутся, прямая YO проводится параллельно прямой MP.

86.1. 1) 13 см. **86.2.** 2) 13 дм. **86.3.** 2) 10 см. **86.4.** 2) 12 см.

86.5. 1) Возможны два случая.

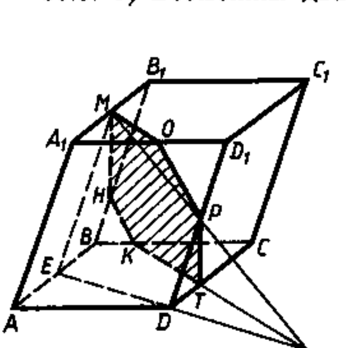

Рис. 312

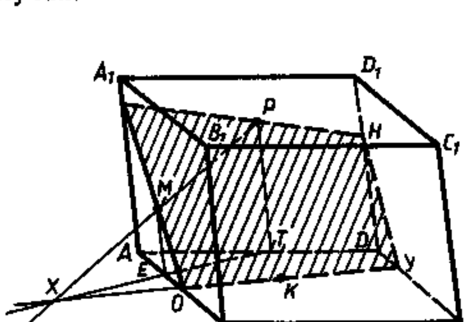

Рис. 313

а) Точки A и C лежат по одну сторону от плоскости.

б) Точки A и C лежат по разные стороны от плоскости. В случае а) проведем высоту AK трапеции $ABCD$. Тогда $AK=8$ см, $KC=6$ см. Из треугольника AKC находим, что $AC=10$.

В случае б) докажем подобие треугольников AOB и COD, где O — точка пересечения отрезка AC и плоскости. Из подобия треугольников AOB и COD находим $OB=3$, $OD=5$. Тогда $AO=3\sqrt{10}$, $OC=5\sqrt{10}$ и $AC=8\sqrt{10}$.

2) Нет, так как в противном случае прямые будут параллельными.

86.6. 1) $\sqrt{29}$ или $5\sqrt{5}$. 2) Нет.

86.7. Так как две прямые, перпендикулярные одной плоскости, параллельны, то четырехугольники ACC_1A_1 и BB_1D_1D являются трапециями (или параллелограммами), плоскости которых перпендикулярны плоскости α. Учитывая, что $AA_1+CC_1=BB_1+DD_1$, получаем, что средние линии этих трапеций (параллелограммов) равны. Пусть точки M, K, M_1, K_1 — середины отрезков AC, BD, A_1C_1, B_1D_1 соответственно. Тогда $MM_1=KK_1$. Из перпендикулярности плоскостей четырехугольников ACC_1D_1 и BB_1D_1D плоскости α вытекает, что $MM_1 \| KK_1$. Следовательно, четырехугольник MKK_1M_1 является параллелограммом и $MK \| M_1K_1$. В то же время можно доказать, что $MK \| AD$ и $M_1K_1 \| A_1D_1$. Значит, $AD \| A_1D_1$, откуда следует, что $AD \| \alpha$. Аналогично получаем, что $BC \| \alpha$.

86.8. Указание. Из равенства $BB_1=DD_1$ получаем, что $BD \| B_1D_1$. Далее задача решается аналогично задаче 86.7.

87.1. в) 6. **87.2.** в) 24.

87.3. б) 84 мм². **87.4.** б) 84 мм².

87.5. 1) Треугольники DAB и DAC равны по двум сторонам и углу между ними, значит, $DB=DC$. Пусть K — середина отрезка BC. Тогда отрезки DK и AK будут высотами треугольников ABC и DBC соответственно. Значит, прямая BC перпендикулярна плоскости AKD, а значит, и прямой AD.

2) Если треугольники ABD и ABC лежат в одной плоскости ADC, то прямая AB может не быть перпендикулярной плоскости α.

87.6. 1) Очевидно, что $DB=DA$ и треугольники BDC и CDA равны. Значит, $BC=AC$. Пусть K — середина отрезка AB. Тогда CK и DK — высоты треугольников ABC и ABD соответственно. Следовательно, прямая AB перпендикулярна плоскости CKD, а значит, и прямой DC.

2) Не всегда.

87.7. Очевидно, что треугольники AA_1D_1 и AA_1B_1 равны, значит, $AB_1=AD_1$. Пусть O — середина отрезка B_1D_1. Значит, прямая B_1D_1 перпендикулярна плоскости ACC_1, в которой лежат прямые A_1O и AO. Прямая A_1C также лежит в этой плоскости, поэтому прямые A_1C и B_1D_1 перпендикулярны.

87.8. Да. Указание. Задача решается аналогично задаче 87.7

88.3. 15 см и $6\sqrt{3}$ см. **88.4.** 15 см и $8\sqrt{3}$ см.

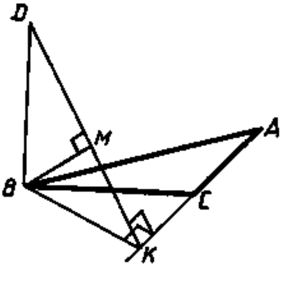

Рис. 314

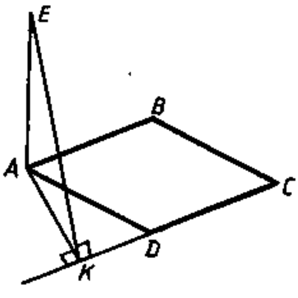

Рис. 315

88.5. Опустим перпендикуляр DK из точки D на прямую AC (рис. 314). Тогда прямые BK и AC взаимно перпендикулярны по теореме о трех перпендикулярах. Так как треугольник ABC тупоугольный, то точка K лежит на продолжении стороны AC за точку C. Из треугольника BKC найдем $BK=5\sqrt{3}$ см, а из треугольника BKD $KD=10$ см. Расстояние от точки B до плоскости ADC есть высота BM треугольника BKD. $BM=2{,}5\sqrt{3}$ см.

88.6. 2 см и $\sqrt{3}$ см. Указание. Опустите перпендикуляр EK из точки E на прямую DC (рис. 315). Точка K будет лежать на продолжении стороны ромба DC за точку D. Далее задача решается аналогично задаче 88.5.

88.7. 1) Пусть AK — высота треугольника ABC, а AK_1 — ее проекция на плоскость α (рис. 316). Можно доказать, что AK_1 — высота треугольника AB_1C_1 и $KK_1=5$ см. Последовательно находим AK_1 из треугольника AB_1C_1, AK из треугольника AKK_1: $AK_1=12$ см, $AK=13$ см. Площадь треугольника ABC равна 91 см^2.

2) Пусть даны две параллельные плоскости α и β. Из данного множества треугольников выберем произвольный треугольник ABC, в котором вершины A и B принадлежат плоскости α, а вершина C — плоскости β. Пусть M — точка пересечения медиан этого треугольника, а CC_1 — одна из медиан. Через точку M проведем прямую KE, перпендикулярную данным плоскостям, так что $K\in\alpha$, $E\in\beta$. Можно доказать, что треугольники KMC_1 и EMC подобны,

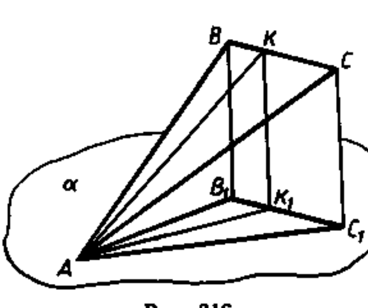

Рис. 316

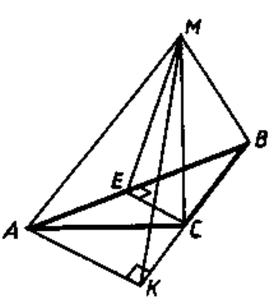

Рис. 317

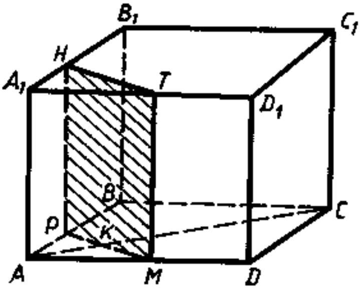

Рис. 318

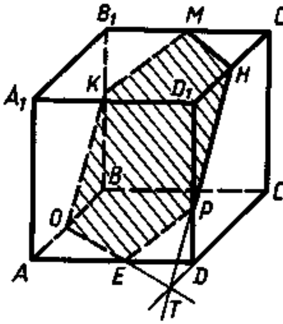

Рис. 319

причем $EM:MK=CM:MC_1=2:1$. Таким образом, каждая точка искомого множества отстоит от плоскости α на одно и то же расстояние, равное $\frac{1}{3}$ расстояния между плоскостями. Значит, искомое множество есть плоскость, параллельная плоскостям α и β.

88.8. 1) Искомое множество есть плоскость γ, параллельная плоскости β, причем плоскость β проходит между плоскостями γ и α и делит расстояние между ними пополам.

89.3. а) $5\sqrt{6}$ см. Указание. Проведем высоту BK ромба. Угол EKB будет линейным для двугранного угла $EADB$.

б) $50°46'$.

89.4. а) $20\sqrt{3}$ см.

б) $67°48'$. Указание. Проведем высоту BK параллелограмма. Угол MKB будет линейным для двугранного угла $MADB$.

89.5. Проведем высоту CE треугольника ABC (рис. 317), $CE=\frac{a}{2}$. Угол CEM будет линейным для двугранного угла $MABC$, его тангенс равен $2\sqrt{2}$. Для нахождения угла между прямой AM и плоскостью MBC спроектируем точку A на плоскость MBC. Так как треугольник ABC тупоугольный, то точка K, являющаяся проекцией точки A, будет лежать на продолжении стороны BC за точку C. Из треугольника ACK находим $CK=\frac{a}{2}$, $AK=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Из треугольника MKC $MK=\frac{3a}{2}$. Из треугольника AMK находим угол MAK, он равен $30°$.

89.6. $2\sqrt{2}$, $30°$.

90.5. а) Искомое сечение изображено на рисунке 318. Это прямоугольник, в котором $PM \parallel BD$, $TM \parallel DD_1$.

б) Используя теорему о квадрате диагонали прямоугольного параллелепипеда, находим $AA_1=8$. Можно доказать, что $AP= =AM=\frac{1}{2}AD=2$, $PM=2\sqrt{2}$. Площадь сечения равна $16\sqrt{2}$.

90.6. б) $8\sqrt{2}$.

90.7. Сечение куба плоскостью MHP изображено на рисунке 319. Для его построения вначале строим точку T как пересечение прямых HP и DC. Далее проводим $TO \parallel MH$, $OK \parallel HP$, $KM \parallel PE$.

а) По теореме о квадрате диагонали прямоугольного параллелепипеда ребро куба равно 2. Рассмотрев треугольники D_1HP и TDP, докажем, что $D_1H = DT = 1$. Далее, так как $TO \parallel MH \parallel BD$ и $BO \parallel TD$, то $BO = TD = 1$. Таким образом, можно доказать, что все вершины сечения являются серединами ребер куба, а сторона сечения равна половине диагонали граней куба, следовательно, его периметр равен $6\sqrt{2}$.

б) Так как прямая MH перпендикулярна прямым A_1C_1 и CC_1, то прямая MH перпендикулярна плоскости A_1C_1C. Следовательно, плоскости MHP и A_1C_1C взаимно перпендикулярны.

90.8. а) $4\sqrt{3}$.

91.3. 1) Указание. Опустим перпендикуляр MK из точки M на прямую AC. Точка K будет лежать на продолжении отрезка AC за точку C, $MK = 6$ см.

2) 60°. Указание. Докажите, что угол MDC является линейным для двугранного угла $MADB$.

91.4. 1) 8 см.

2) 30°. Указание. Докажите, что ребро DB перпендикулярно плоскости ABC.

91.5. 1) Так как точка M равноудалена от вершин прямоугольного треугольника ABC, то ее проекцией на плоскость ABC служит точка O — середина гипотенузы AB (рис. 320), OK — средняя линия треугольника ABC. Тогда угол OKM будем равен углу между плоскостями ABC и MBC. $OK = \frac{a}{2}$, $\angle OKM = 60°$. Значит, $MO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

2) Проведем высоту MO треугольника MBC (рис. 321). Можно доказать, что прямая MO будет перпендикулярна плоскости ABC. Проведем OK перпендикулярно AC. По теореме о трех

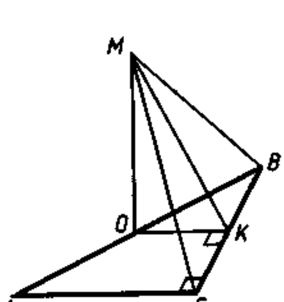

Рис. 320

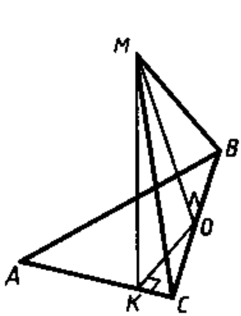

Рис. 321

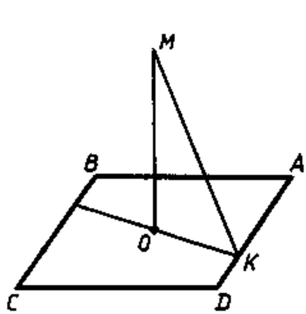

Рис. 322

перпендикулярах прямые MK и AC будут перпендикулярны. Тогда MK — искомое расстояние. Последовательно находим $OK=\frac{3}{2}$ см, $MO=3$ см, $MK=\frac{3\sqrt{5}}{2}$ см.

91.6. 1) Так как точка M равноудалена от сторон ромба, то ее проекцией O на плоскость ABC служит точка пересечения диагоналей ромба (рис. 322). Проведем OK перпендикулярно стороне ромба. Прямые AD и MK будут взаимно перпендикулярны по теореме о трех перпендикулярах. Угол MKO будет линейным для двугранного угла $MADC$. Находим OK как половину высоты ромба. Из треугольника MOK $OK=MO$, $MO=\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

2) $3\sqrt{5}$ см.

91.7. Пусть O — точка пересечения диагоналей квадрата, лежащего в основании данного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Проведем луч OK перпендикулярно отрезку BD до пересечения с прямой CC_1 в точке M. Угол между плоскостью сечения и плоскостью основания будет измеряться углом MOC. Из треугольника MOC находим $CM=\sqrt{2}>CC_1$. Значит, точка M лежит вне отрезка CC_1 и сечение будет иметь вид, указанный на рисунке 323. Далее из треугольника OPK находим $OP=1$, $OK=\sqrt{2}$, $KC_1=PC=\sqrt{2}-1$, $ET=2EK=$ $=2KC_1=2(\sqrt{2}-1)$, $BD=2\sqrt{2}$. Площадь сечения равна $4-\sqrt{2}$.

91.8. $\frac{2\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}$.

92.3. 1) $4\sqrt{6}$ см^2; $4\sqrt{3}$ см. 2) 90°.

92.4. 1) 8 см^2; $4\sqrt{3}$ см. 2) 90°.

92.5. 1) $AMNC$ — искомое сечение (рис. 324), где $MN\parallel A_1C_1$, $NP\parallel BB_1$; $\angle NKP$ — линейный угол двугранного угла, образованного плоскостями сечения и основания ($PK\perp AC$). Высота тре-

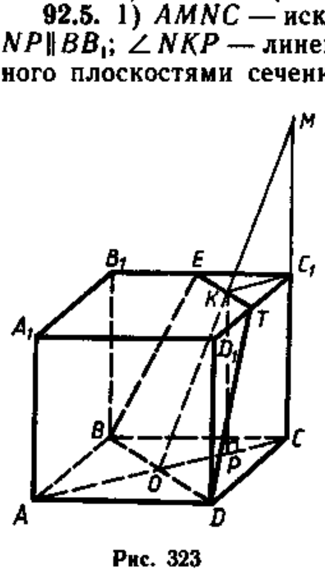

Рис. 323

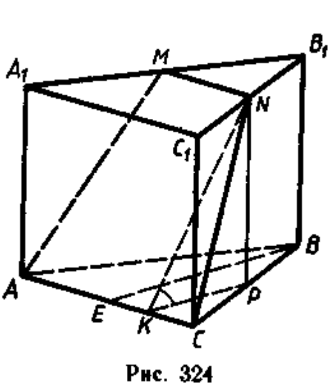

Рис. 324

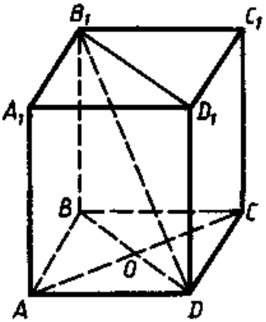

Рис. 325

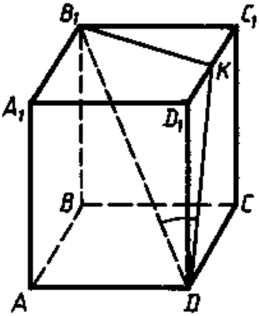

Рис. 326

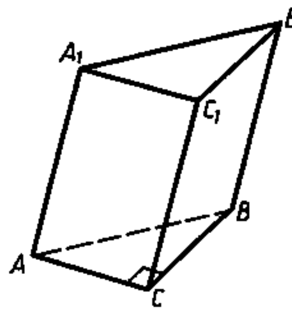

Рис. 327

угольника ABC $BE=\frac{8\sqrt{3}}{2}\sin 60°=4$, $KP=2$, $\operatorname{tg} NKP=\frac{NP}{KP}=$ $=\frac{2\sqrt{3}}{2}=3$. Отсюда следует, что $\angle NKP=60°$, $KN=4$. Площадь сечения $S=\frac{1}{2}(MN+AC)\cdot NK=8\sqrt{3}$.

2) $2\sqrt{2}$ см. Указание. Расстоянием между прямыми AA_1 и B_1D служит расстояние между AA_1 и плоскостью BB_1D, т. е. длина отрезка AO (рис. 325).

92.6. 1) $48\sqrt{2}$; 45°; 2) 3 см.

93.3. $32\sqrt{6}$ см^2; $16(2\sqrt{6}+\sqrt{2})$ см^2.

93.4. $40\sqrt{3}$ см^2; $64\sqrt{3}$ см^2.

93.5. На рисунке 326 $\angle B_1DK$ — угол между прямой B_1D и плоскостью DD_1C_1 $(B_1K\perp DD_1C_1)$; $B_1K=a\sin 60°=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ и $D_1K=\frac{a}{2}$. Из прямоугольного треугольника B_1KD следует, что $DK=$ $=B_1K=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Из треугольника DD_1K имеем $DD_1=\sqrt{\frac{3a^2}{4}-\frac{a^2}{4}}=$ $=\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Тогда площадь полной поверхности параллелепипеда равна $S=4a\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2}+a^2\sqrt{3}=a^2(2\sqrt{2}+\sqrt{3})$.

93.6. $a^2(4+\sqrt{2})$.

94.1. 1) Так как плоскости ABC и AA_1C_1 перпендикулярны и прямая BC, лежащая в плоскости ABC, перпендикулярна линии пересечения AC этих плоскостей, то $BC\perp AA_1C_1$. Следовательно, $BC\perp CC_1$. Отсюда следует, что параллелограмм CC_1B_1B является прямоугольником (рис. 327).

2) 300 см^2.

94.2. 1) Указание. Задача решается аналогично задаче 94.1 (1). 2) 300 см^2.

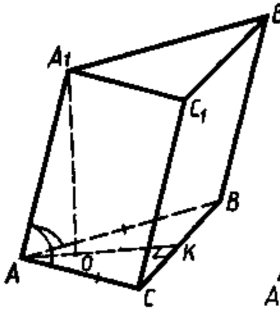

Рис. 328

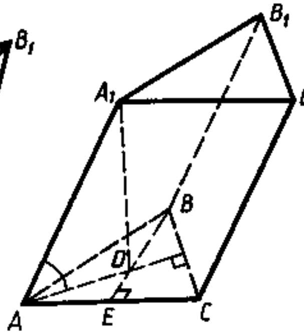

Рис. 329

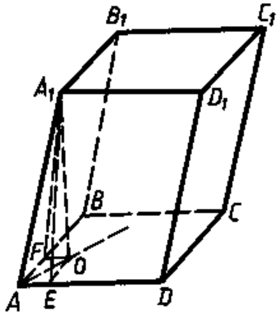

Рис. 330

94.3. 1) Так как $\angle A_1AC=\angle A_1AB<90°$, то боковое ребро AA_1 проектируется на биссектрису угла BAC (рис. 328.). $A_1O\perp ABC$. По условию треугольник ABC равнобедренный, а потому $AK\perp BC$. На основании теоремы о трех перпендикулярах можно утверждать, что $AA_1\perp CB$, но так как $CC_1\parallel AA_1$, то $CC_1\perp CB$, а потому параллелограмм CC_1B_1B является прямоугольником.

2) $40(3+\sqrt{7})$ см^2.

94.4. 1) Указание. Задача решается аналогично задаче 94.3 (1).

2) $3(2+\sqrt{2}+\sqrt{10})$ см^2.

94.5. 1) Вершина A_1 проектируется в центр правильного треугольника ABC (рис. 329). Площадь боковой поверхности $S=2S_{AA_1C_1C}+S_{CC_1B_1B}$, где CC_1B_1B — прямоугольник (см. доказательство к задаче 94.3 (1)); $AO=\frac{a}{\sqrt{3}}$. Из треугольника A_1OA находим, что $AA_1=\frac{2a}{\sqrt{3}}$. Тогда $S_{CC_1B_1B}=\frac{2a^2}{\sqrt{3}}$. Из треугольника A_1EA находим, что высота параллелограмма AA_1C_1C $A_1E=\sqrt{\frac{4a^2}{3}-\frac{a^2}{4}}=$ $=\frac{a\sqrt{13}}{2\sqrt{3}}$. $S_{AA_1C_1C}=\frac{a^2\sqrt{13}}{2\sqrt{3}}$. $S=\frac{a^2\sqrt{13}}{\sqrt{3}}+\frac{2a^2}{\sqrt{3}}=\frac{a^2}{\sqrt{3}}(2+\sqrt{13})$.

2) $\frac{2ml}{\cos\frac{\alpha}{2}}\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)$. Указание. Перпендикулярным сечением призмы является равнобедренный треугольник с углом при вершине α и с высотой, опущенной на основание, равной m. Площадь боковой поверхности находим как произведение периметра перпендикулярного сечения на боковое ребро.

94.6. 1) $c(a+b)\sqrt{3}$. Указание. Ребро AA_1 проектируется на биссектрису угла BAD (рис. 330). Для нахождения высоты A_1E боковой грани AA_1D_1D последовательно рассматриваем прямоугольные треугольники A_1OA, AEO и A_1EA. Высота A_1F грани AA_1B_1B равна A_1E. Площадь боковой поверхности $S=2S_{AA_1D_1D}+2S_{AA_1B_1B}$.

2) $\dfrac{al\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}$. Указание. Для решения задачи необходимо предварительно доказать, что $AA_1\perp BC$ (рис. 331). Перпендикулярным сечением призмы является треугольник CEB, причем $CE=BE$ и $\angle CEB=\alpha$, $S_{бок}=P_{CEB}\cdot AA_1$.

94.7. Применяя теорему о трех перпендикулярах, можно доказать, что $AC\perp B_1B$ (рис. 332). Перпендикулярным сечением призмы является прямоугольный треугольник ACF ($\angle ACF=$ $=90°$), $CF=a\cdot\sin\alpha$, $AC=a\sin\alpha\operatorname{tg}\varphi$, $AF=\dfrac{a\sin\alpha}{\cos\varphi}$.

Периметр перпендикулярного сечения

$$P=a\sin\alpha\left(1+\operatorname{tg}\varphi+\frac{1}{\cos\varphi}\right)=\frac{a\sin\alpha\,(1+\cos\varphi+\sin\varphi)}{\cos\varphi}.$$

Из $\triangle BB_1E$ находим:

$$BB_1=\frac{a}{2\cos\alpha},\ S_{бок}=P_{AFC}\cdot B_1B=\frac{a^2\operatorname{tg}\alpha\,(1+\cos\varphi+\sin\varphi)}{2\cos\varphi}.$$

94.8. $\dfrac{l^2\sin 2\varphi\,(1+\cos\alpha+\sin\alpha)}{2\cos\alpha}$. Указание. Задача решается аналогично задаче 94.7.

95.1. а) $4(\sqrt{3}+2\sqrt{21})$ см^2; б) 68°57′; 79°6′.

95.2. а) $5(5+\sqrt{221})$ см^2; б) 63°12′; 70°21′.

95.3. 1) 28°12′. 2) $42\frac{2}{3}$ см^2. **95.4.** 1) 77°4′. 2) $36\sqrt{6}$ см^2.

95.5. 1) На рисунке 333 $\angle BED$ — линейный угол двугранного угла, образованного смежными боковыми гранями BMC и DMC ($OE\perp MC$), $OE=OC\cdot\sin 43°$, $\operatorname{tg}\dfrac{BED}{2}=\dfrac{OD}{OE}=\dfrac{1}{\sin 43°}$. Отсюда можно получить, что $\angle BED\approx 111°25'$.

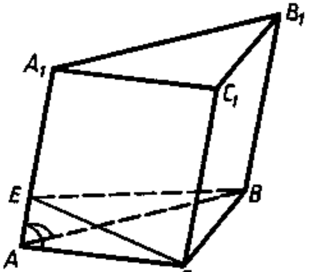

Рис. 331

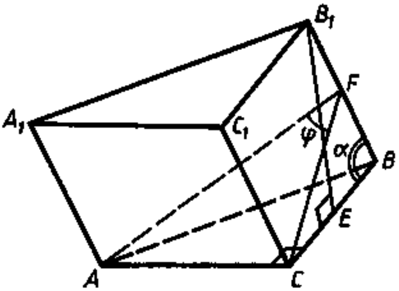

Рис. 332

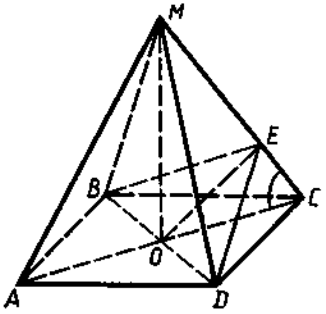

Рис. 333

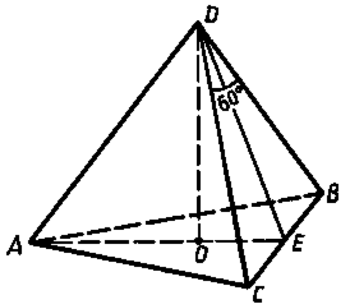

Рис. 334

2) На рисунке 334 $\angle CDB = 60°$ — плоский угол при вершине пирамиды. Положим, что сторона основания равна a. Тогда высота боковой грани $DE = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, а $OE = \frac{a}{2\sqrt{3}}$. Так как $DO = 4$, то $\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{12} = 16$. Отсюда $a = 2\sqrt{6}$. Тогда $DE = 3\sqrt{2}$. $S_{бок} = 3\sqrt{6} \cdot 3\sqrt{2} = 18\sqrt{3}$ см^2.

95.6. 1) 69°42′. 2) $8\sqrt{3}$ см^2.

96.1. 1) $30\sqrt{3}$ см. 2) 64 см^2. **96.2.** 1) $10\sqrt{3}$ см. 2) $15\sqrt{3}$ см^2.

96.3. 1) $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. 2) 27 см^2. **96.4.** 1) $6\sqrt{3}$ см. 2) 72 см^2.

96.5. 1) a. Указание. Вершина пирамиды проектируется в центр описанной окружности, которая совпадает с серединой большего основания трапеции.

2) $24\sqrt{3}$ см^2. Указание. В сечении получается трапеция, основаниями которой служат высоты верхнего и нижнего оснований пирамиды. Зная площадь этой трапеции, можно найти ее высоту, т. е. высоту усеченной пирамиды.

96.6. 1) $2h\sqrt{3}$; $h\sqrt{3}$. 2) 140 см^2.

97.1. 1) 60 см^2. 2) $20(3+\sqrt{3})$ см^2.

97.2. 1) 27 см^2. 2) 128 см^2.

97.3. 1) $100(\sqrt{2}+1)$ см^2. 2) $120(2+\sqrt{3})$ см^2.

97.4. 1) $18(2+\sqrt{3}+\sqrt{6})$ см^2. 2) 480 см^2.

97.5. 1) На рисунке 335 $AD \perp ABC$ и $\angle AED$ ($AE \perp BC$), является линейным углом двугранного угла, образованного гранью CDB и плоскостью основания. $AE = AD = a \sin 60° = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $DE = \frac{a\sqrt{6}}{2}$, $AB = a\sqrt{3}$. $S_{бок} = \frac{1}{2} AD \cdot AC + \frac{1}{2} DE \cdot BC + \frac{1}{2} AD \cdot AB = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{a^2\sqrt{6}}{4} + \frac{3a^2}{4} = \frac{a^2}{4}(3+\sqrt{6}+\sqrt{3})$.

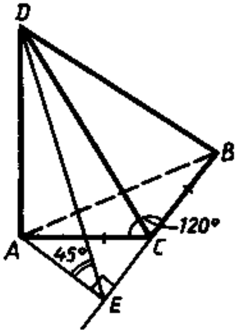

Рис. 335

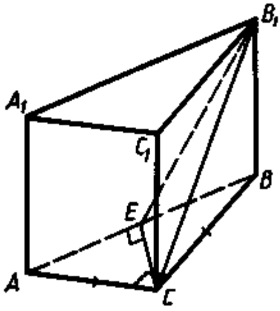

Рис. 336

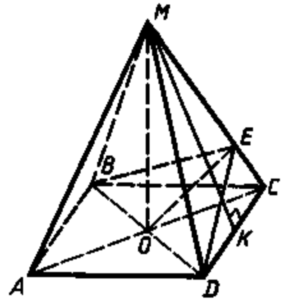

Рис. 337

2) На рисунке 336 $\angle CB_1E = 30°$ ($CE \perp AA_1B_1$), $CE = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Из прямоугольного треугольника CB_1E следует, что $B_1C = 2EC = a\sqrt{2}$. Тогда из треугольника CBB_1 получаем, что $B_1B = \sqrt{CB_1^2 - CB^2} = a$. $S_{бок} = (2AC + AB) \cdot BB_1 = a^2(2+\sqrt{2})$.

97.6. 1) $\frac{a^2}{2}(3+2\sqrt{3})$. 2) $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}\cdot(3+\sqrt{3})$.

97.7. На рисунке 337 $\angle BED$ ($OE \perp MC$) является линейным углом двугранного угла между смежными боковыми гранями. $S_{бок} = \frac{1}{2}P_{осн} \cdot MK$, где MK — апофема пирамиды. Из подобия треугольников MKC и DEC следует, что $\frac{MK}{DE} = \frac{KC}{EC}$. Отсюда $MK = \frac{DE \cdot KC}{EC}$.

$$DE = \frac{a\sqrt{2}}{2\sin\alpha},\ EC = \sqrt{a^2 - \frac{2a^2}{4\sin^2\alpha}} = \frac{a\sqrt{2\sin^2\alpha - 1}}{\sqrt{2}\sin\alpha},$$

$$MK = \frac{a\sqrt{2}\cdot a\sqrt{2}\cdot\sin\alpha}{2\sin\alpha\cdot 2\cdot a\sqrt{2\sin^2\alpha - 1}} = \frac{a}{2\sqrt{2\sin^2\alpha - 1}}.$$

$$S_{бок} = 2a\cdot\frac{a}{2\sqrt{2\sin^2\alpha - 1}} = \frac{a^2}{\sqrt{2\sin^2\alpha - 1}} = \frac{a^2}{\sqrt{-\cos 2\alpha}}.$$

97.8. $\frac{3m^2}{4\sqrt{4\sin^2\varphi - 1}}$.

98.1. 1) а) $\overrightarrow{C_1O}$, $\overrightarrow{C_1A}$; б) $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{C_1D_1}$, $\overrightarrow{B_1A_1}$; в) $\overrightarrow{D_1C}$.
2) Да, $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

98.2. 1) а) $\overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{PC_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{DD_1}$; б) $\overrightarrow{BC_1}$, $\overrightarrow{AD_1}$, $\overrightarrow{KP}$; в) $\overrightarrow{A_1C_1}$.
2) Да, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

98.3. 1) а) $\overrightarrow{PT}$, $\overrightarrow{KM}$; б) $\overrightarrow{KP}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{MT}$; в) $\overrightarrow{MK}$.

2) Да, $\vec{a}$ и $\vec{c}$.

98.4. 1) а) $\overrightarrow{KP}$, $\overrightarrow{MT}$; б) $\overrightarrow{MT}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{KP}$; в) $\overrightarrow{KM}$.

2) Да, $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

98.5. 1) а) $\overrightarrow{EM}$ и $\overrightarrow{TK}$, $\overrightarrow{KT}$ и $\overrightarrow{ME}$, $\overrightarrow{TM}$ и $\overrightarrow{EK}$, $\overrightarrow{MT}$ и $\overrightarrow{KE}$;
б) $\overrightarrow{KT}$ и $\overrightarrow{EM}$, $\overrightarrow{TK}$ и $\overrightarrow{ME}$, $\overrightarrow{EK}$ и $\overrightarrow{MT}$, $\overrightarrow{KE}$ и $\overrightarrow{TM}$;
в) $\overrightarrow{KT}$, $\overrightarrow{TK}$, $\overrightarrow{EM}$ и $\overrightarrow{ME}$; $\overrightarrow{KE}$, $\overrightarrow{EK}$, $\overrightarrow{MT}$ и $\overrightarrow{TM}$; $\overrightarrow{ET}$, $\overrightarrow{TE}$, $\overrightarrow{KM}$ и $\overrightarrow{MK}$.

2) Да, $\overrightarrow{HK}$ и $\overrightarrow{MT}$.

98.6. 1) а) $\overrightarrow{MT}$ и $\overrightarrow{KE}$, $\overrightarrow{TM}$ и $\overrightarrow{EK}$, $\overrightarrow{MK}$ и $\overrightarrow{TE}$, $\overrightarrow{KM}$ и $\overrightarrow{ET}$;
б) $\overrightarrow{MT}$ и $\overrightarrow{KE}$, $\overrightarrow{TM}$ и $\overrightarrow{EK}$, $\overrightarrow{MK}$ и $\overrightarrow{TE}$, $\overrightarrow{KM}$ и $\overrightarrow{ET}$;
в) $\overrightarrow{MT}$, $\overrightarrow{TM}$, $\overrightarrow{KE}$ и $\overrightarrow{EK}$; $\overrightarrow{MK}$, $\overrightarrow{KM}$, $\overrightarrow{TE}$ и $\overrightarrow{ET}$; $\overrightarrow{KT}$, $\overrightarrow{TK}$, $\overrightarrow{ME}$ и $\overrightarrow{EM}$.

2) Да, $\overrightarrow{HE}$ и $\overrightarrow{KT}$.

99.1. 1) $\overrightarrow{AC}$. **99.2.** 1) $\overrightarrow{B_1D_1}$.

99.3. 1) $\overrightarrow{AC}$. **99.4.** 1) $\overrightarrow{CD_1}$.

99.5. 1) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{B_1D_1}-\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BC_1}+\overrightarrow{DA_1}-\overrightarrow{BD_1}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{D_1B}+$
$+\overrightarrow{BC_1}-\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{B_1D_1}+\overrightarrow{DA_1}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{D_1C_1}-\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{B_1D_1}+\overrightarrow{DA_1}=\overrightarrow{AC}+$
$+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{DA_1}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB_1}-\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BB_1}-$
$-\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AC}+\vec{0}=\overrightarrow{AC}$.

2) $\vec{x}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DB}$.

99.6. 1) $\overrightarrow{CA}$. 2) $\overrightarrow{AB}$.

100.1. 2) $-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. **100.2.** 2) $-2\overrightarrow{AB}$.

100.3. 1) а) $\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$; б) $\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$; в) $-1{,}5\overrightarrow{AC}$. 2) $-\frac{1}{2}$.

100.4. 1) а) $\frac{7}{3}\overrightarrow{AC}$; б) $\frac{4}{3}\overrightarrow{CA}$; в) $-\frac{3}{7}\overrightarrow{BC}$. 2) -2.

100.5. Так как $\angle DAC=\angle DAB$, то вершина D проектируется на биссектрису угла BAC (рис. 338). По условию $M\in BC$, а потому $\frac{CM}{MB}=\frac{1}{2}$. Отсюда следует, что $\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{BC}=-3\overrightarrow{CM}$,

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}.$$

100.6. а) $2\overrightarrow{KH}$; б) $\frac{1}{3}\overrightarrow{DH}$; в) $1{,}5\,\overrightarrow{PK}-0{,}5\,\overrightarrow{PD}$.

101.1. 1) $\frac{1}{3}\vec{a}+\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$. 2) $\frac{2}{3}\vec{a}+\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$.

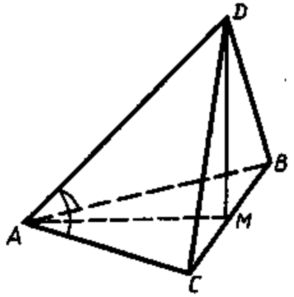

Рис. 338

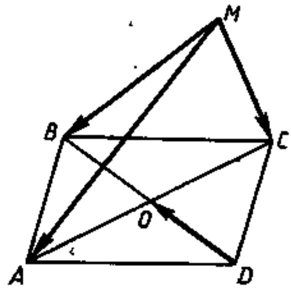

Рис. 339

101.2. 1) $\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{c}$. 2) $\frac{2}{3}\vec{a}+\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}$.

101.3. 1) $\overrightarrow{DO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MD})$ (рис. 339), $\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}$. Отсюда следует, что $\overrightarrow{DO}=\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{c}-\vec{a}+\vec{b})=-\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{c}$.

2) $\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}$.

101.4. 1) $\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}$.

2) $\overrightarrow{A_1P}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AA_1}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})-\overrightarrow{AA_1}=\frac{1}{3}(\vec{b}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{c})-\vec{a}=-\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}$.

101.5. 1) $\frac{2}{3}\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{B_1B}+\frac{1}{3}\overrightarrow{B_1C_1}$. Указание. Точка O является точкой пересечения медиан треугольника ABD.

2) Введем базисные векторы $\overrightarrow{DA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{DB}=\vec{b}$ и $\overrightarrow{DC}=\vec{c}$ (рис. 340).

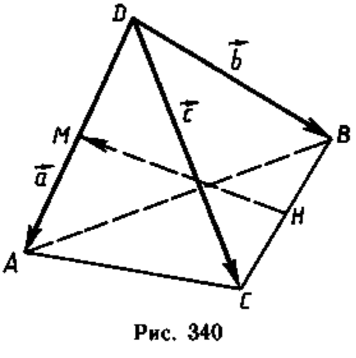

Рис. 340

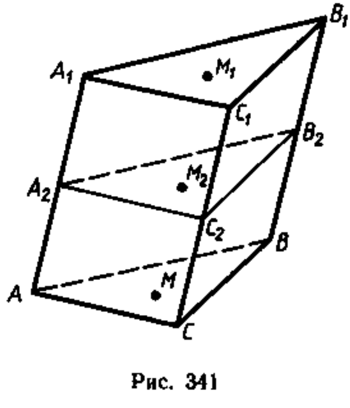

Рис. 341

$\overrightarrow{HM}=\overrightarrow{DM}-\overrightarrow{DH}=\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{c}$; $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DA}=\vec{b}-\vec{a}$; $\overrightarrow{DC}=\vec{c}$; $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$. Отсюда следует, что $\overrightarrow{HM}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-$ $-\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$, т. е. векторы $\overrightarrow{HM}$, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$ компланарны, а следовательно, прямые HM, AB и DC параллельны одной плоскости.

101.6. 1) $\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BB_1}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

101.7. Пусть M, M_1 и M_2 — точки пересечения медиан оснований и сечения соответственно (рис. 341). Выберем в пространстве произвольную точку O.

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OB_2}+\overrightarrow{OC_2})-\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OC_1})=$$
$$=\frac{1}{3}(\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{B_1B_2}+\overrightarrow{C_1C_2}).$$

Аналогично можно получить, что

$$\overrightarrow{M_1M}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{B_1B}+\overrightarrow{C_1C});$$

$$\frac{A_1A_2}{A_1A}=\frac{B_1B_2}{B_1B}=\frac{C_1C_2}{C_1C}=k.$$

Отсюда следует, что

$$\overrightarrow{M_1M_2}=k\cdot\frac{1}{3}(\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{B_1B}+\overrightarrow{C_1C})=k\overrightarrow{M_1M},$$

т. е. векторы $\overrightarrow{M_1M_2}$ и $\overrightarrow{M_1M}$ коллинеарны, а так как они отложены от одной и той же точки M_1, то можно утверждать, что точки M_1, M_2 и M лежат на одной прямой.

101.8. Указание. Задача решается аналогично задаче 101.7.

102.1. 1) $(6+2\sqrt{3})$ см^2. 2) 2 см^2. 3) $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$. 4) 30°. 5) 2 см.

102.2. 1) $4(\sqrt{7}+1)$ см^2. 2) $2\sqrt{3}$ см^2. 3) 60°. 4) $\arccos\frac{1}{\sqrt{7}}$. 5) $2\sqrt{2}$ см.

102.3. 1) $4(4\sqrt{3}+3)$ см^2. 2) $4\sqrt{3}$ см^2. 3) 60°. 4) 30°. 5) $\overrightarrow{A_1M}=$ $=\frac{1}{3}\overrightarrow{A_1A}+\frac{1}{3}\overrightarrow{A_1B}+\frac{1}{3}\overrightarrow{A_1C}$. 6) 90°.

102.4. 1) $(12\sqrt{3}+\sqrt{156})$ см^2. 2) $4\sqrt{3}$ см^2. 3) 60°. 4) $\operatorname{arctg}2\sqrt{3}-$ $-60°$. 5) $\overrightarrow{DO}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$. 6) 90°.

102.5. По данным задачи легко найти площадь треугольника ABC: $S_{ABC}=84$. Площадь поверхности $S=P_{ABC}\cdot AA_1+2S_{ABC}=$ $=588$ (рис. 342). MHC — сечение, площадь которого надо найти. Плоскости MHC и ABC пересекаются по прямой PQ, причем

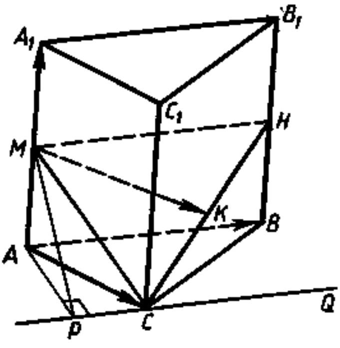

Рис. 342

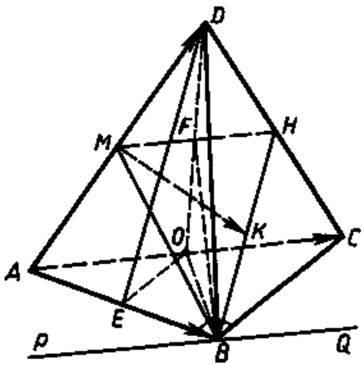

Рис. 343

$PQ \parallel AB$. Из точки A опускаем перпендикуляр AP на прямую PQ и точки M и P соединяем. MP — высота треугольника MHC. $AP=\frac{2S_{ABC}}{AB}=\frac{2\cdot 84}{14}=12$. Из треугольника MAP следует, что $MP=13$. $S_{MHC}=\frac{1}{2}\cdot 14\cdot 13=91$; $\angle MPA$ — линейный угол двугранного угла, образованного плоскостями MHC и ABC, $\cos MPA=\frac{AP}{MB}=\frac{12}{13}$. Отсюда $\angle MPA=\arccos\frac{12}{13}$. $\angle AMP$ — угол между прямой AA_1 и плоскостью MHC, $\angle AMP=\arccos\frac{5}{13}$, $\overrightarrow{MK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{MH}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AA_1}+$ $+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

102.6. Так как $DA=DB=DC$, то вершина D проектируется в центр описанной около основания окружности, в данном случае на середину гипотенузы AC (рис. 343). Из точки O опускаем перпендикуляр OE на AB и точки D и E соединяем. DE — высота боковой грани ADB, $DO=\sqrt{3}$, $OE=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Из треугольника DOE следует, что $DE=\sqrt{3+\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{7}{2}}$. $S_{бок}=\frac{1}{2}AC\cdot DO+$ $+2\cdot\frac{1}{2}AB\cdot DE=\sqrt{7}+\sqrt{3}$. FB — высота сечения BMH. Из треугольника FOB следует, что $FB=\sqrt{\frac{3}{4}+1}=\frac{\sqrt{7}}{2}$. $S_{сеч}=\frac{1}{2}MH\cdot FB=$ $=\frac{1}{4}AC\cdot FB=\frac{1}{4}\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{7}}{2}=\frac{\sqrt{7}}{4}$, $\angle FBO$ — линейный угол двугранного угла, образованного плоскостями BMH и ABC. $\operatorname{tg}\angle FBO=$

$=\frac{FO}{OB}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Отсюда $\angle FBO=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\angle DBF$ — угол между прямой BD и плоскостью BMH. $\operatorname{tg}\angle DBO=\frac{DO}{OB}=\sqrt{3}$. Отсюда $\angle DBO=60°$. Тогда $\angle DBF=60°-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}$. $\overrightarrow{MK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{MH}=$
$=\frac{1}{2}\overrightarrow{MA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

Отметим, что PQ — линия пересечения плоскостей BMH и ABC, причем $PQ \parallel AC$.

103.1. а) (0; 2; 2), (2; 2; 2);

б) {2; 0; −2}, {−2; 2; −2}, {6; −4; 2};

в) $\vec{p}=8\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$.

103.2. а) (2; 0; 4), (2; 4; 4);

б) {2; 0; −4}, {2; −4; 4}, {6, −8; 4};

в) $\vec{p}=6\vec{i}-12\vec{j}+0\cdot\vec{k}$.

103.3. а) (0; 2; 2), (1; 1; 2);

б) {0; 0; 2}, {−2; 2; 2;}, {−2; 2; 3};

в) $\vec{c}=3\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$.

103.4. а) (4; 4; 6), (2; 4; 6);

б) {0; 0; 6}, {−4; −4; −6}, {4; 4; 9};

в) $\vec{a}=0\cdot\vec{i}+0\cdot\vec{j}+15\vec{k}$.

103.5. а) Из условия следует, что треугольник ADK равнобедренный и высота DK является и медианой. Поэтому K — середина отрезка AC. Отсюда следует, что $K\left(\frac{6+0}{2}; \frac{0+0}{2}; \frac{0+6}{2}\right)$, т. е. $K(3; 0; 3)$. Вершина D равноудалена от вершин правильного треугольника ABC, поэтому точка D проектируется в его центр. $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC})$. Учитывая, что $\overrightarrow{DA}\{6;\ 0;\ 0\}$, $\overrightarrow{DB}\{0; 6; 0\}$, $\overrightarrow{DC}(0; 0; 6\}$, имеем $\overrightarrow{DM}\{2; 2; 2\}$. Так как $D(0; 0; 0)$, то $M(2;\ 2;\ 2)$;

б) $\overrightarrow{CK}\{3; 0; -3\}$, $\overrightarrow{AC}\{-6; 0; 6\}$, $\overrightarrow{DM}\{2; 2; 2\}$. Отсюда следует, что $\vec{p}\{-4;\ -4;\ -4\}=-4\vec{i}-4\vec{j}-4\vec{k}$;

в) $\overrightarrow{DE}\{101;\ 101;\ 101\}$, $\overrightarrow{DM}\{2;\ 2;\ 2\}$. Отсюда следует, что $\overrightarrow{DE}=50{,}5\overrightarrow{DM}$, т. е. эти векторы коллинеарны, а так как они отложены от одной и той же точки D, то точки D, M и E лежат на одной прямой. $DM\perp ABC$, а поэтому и $DE\perp ABC$.

103.6. а) ME — высота прямоугольного треугольника KMP, катеты которого MK и MP соответственно равны 2 и $2\sqrt{2}$. $\frac{KE}{EP}=\frac{MK^2}{MP^2}$, т. е. $\frac{KE}{EP}=\frac{1}{2}$, тогда $\overrightarrow{ME}=\frac{2}{3}\overrightarrow{MK}+\frac{1}{3}\overrightarrow{MP}$.

$\overrightarrow{MK}\{0;\ 0;\ 2\}$, $\overrightarrow{MP}\{2;\ 2;\ 0\}$, отсюда $\overrightarrow{ME}\left\{\frac{2}{3};\ \frac{2}{3};\ \frac{4}{3}\right\}$. Так как $M(0;\ 0;\ 0)$, то $E\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{4}{3}\right)$. Легко доказать, что высота MO равнобедренного треугольника KMH является и высотой пирамиды $MPHK$. Так как треугольник KMH равнобедренный, то O — середина KH. Поэтому $O\left(\frac{0+0}{2};\ \frac{0+2}{2};\ \frac{2+0}{2}\right)$, т. е. $O(0;\ 1;\ 1)$;

б) $\vec{b}=2\vec{i}-1{,}5\vec{j}+2{,}5\vec{k}$.

104.1. а) Указание. Вычислите длины ребер и сравните их. б) $\left(\frac{1}{2};\ \frac{3\sqrt{3}}{2};\ 1\right)$.

104.2. б) $(\sqrt{2};\ \sqrt{2};\ 2\sqrt{2})$.

104.3. а) Необходимо доказать, что равны длины боковых ребер DA, DB и DC. Отсюда следует, что они составляют равные углы с плоскостью основания.

б) Расчет показывает, что $AB=4$, $AC=4\sqrt{2}$ и $BC=4\sqrt{3}$. Так как $BC^2=AC^2+AB^2$, то треугольник ABC прямоугольный с прямым углом при вершине A. Так как $DA=DB=DC$, то высота DE проектируется на середину BC, а потому $E(2;\ 2;\ 3)$.

104.4. а) Указание. Для доказательства того, что боковые грани составляют равные углы с плоскостью основания, необходимо доказать равенство высот боковых граней.

б) $(2;\ 2;\ 2)$. Указание. Необходимо найти середину отрезка MK или отрезка PH.

104.5. а) Поместим пирамиду в прямоугольную систему координат так, что вершина A совпадает с началом координат, а вершины C, B и D принадлежат положительным полуосям Ox, Oy и Oz соответственно. Тогда $A(0;\ 0;\ 0)$, $C(18;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ 12;\ 0)$, $D(0;\ 0;\ 5)$. Середина отрезка CB — точка $M(9;\ 6;\ 0)$. Тогда $DM=\sqrt{81+36+25}=\sqrt{142}$.

б) Пусть O — точка пересечения медиан треугольника ABC. Тогда $\overrightarrow{DO}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC})$. Вычислим координаты вектора $\overrightarrow{DO}$, получим $\overrightarrow{DO}\{6;\ 4;\ -5\}$. Отсюда $DO=\sqrt{36+16+25}=\sqrt{77}$.

104.6. а) $\sqrt{257}$; б) $\frac{2\sqrt{152}}{3}$.

Указание. Учитывая, что $\angle CAB=\angle CAD=45°$, получаем, что $ABCD$ — прямоугольная трапеция с прямым углом при вершине A, причем $AB=BC=14$. Поместим пирамиду в прямоугольную систему координат так, что вершина A совпала с началом координат, а вершины B, D и E принадлежали положительным полуосям Ox, Oy и Oz соответственно. Дальнейшее решение аналогично задачам 104.5 (а, б)

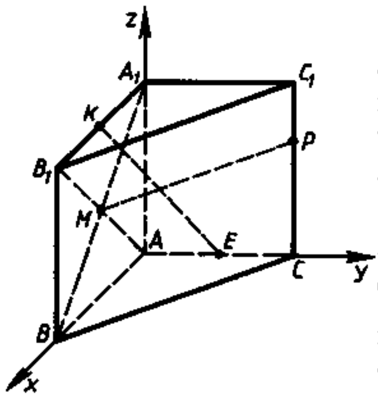

Рис. 344

104.7. 1) Поместим призму в прямоугольную систему координат так, как это показано на рисунке 344. Пусть $A(0;\ 0;\ 0)$, $B(a;\ 0;\ 0)$, $C(0;\ b;\ 0)$, $A_1(0;\ 0;\ c)$. Тогда $K\left(\frac{a}{2};\ 0;\ c\right)$, $E\left(0;\ \frac{b}{2};\ 0\right)$, $M\left(\frac{a}{2};\ 0;\ \frac{c}{2}\right)$, $P\left(0;\ b;\ \frac{2}{3}c\right)$. Необходимо доказать, что прямые KE и MP не параллельны и не пересекаются. $\overrightarrow{KE}\left\{-\frac{a}{2};\ \frac{b}{2};\ -c\right\}$, $\overrightarrow{MP}\left\{-\frac{a}{2};\ b;\ \frac{c}{6}\right\}$. Очевидно, что $\overrightarrow{KE}\neq k\overrightarrow{MP}$, т. е. векторы неколлинеарны. Следовательно, прямые KE и MP не параллельны. Предположим теперь, что прямые MP и KE пересекаются. Тогда векторы $\overrightarrow{KM}$, $\overrightarrow{KE}$ и $\overrightarrow{MP}$ компланарны и $\overrightarrow{KM}=x\overrightarrow{KE}+y\overrightarrow{MP}$; $\overrightarrow{KM}\left\{0;\ 0;\ -\frac{c}{2}\right\}$. Так как разложение по базису единственное, то

$$0=-\frac{a}{2}x-\frac{a}{2}y,\ 0=\frac{b}{2}x+by,\ -\frac{c}{2}=-cx+\frac{c}{6}y.$$

Отсюда следует система $\begin{cases} -\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y=0, \\ \frac{1}{2}x+y=0, \\ -x+\frac{1}{6}y=-\frac{1}{2}, \end{cases}$

которая несовместна. Следовательно, наше предположение неверно, а прямые KE и MP являются скрещивающимися.

2) $\sqrt{(x-1)^2+y^2+z^2}$ есть расстояние между точками $M(x;\ y;\ z)$ и $A(1;\ 0;\ 0)$, а $\sqrt{x^2+(y-1)^2+z^2}$ — между точками $M(x;\ y;\ z)$ и $B(0;\ 1;\ 0)$. Так как $AB=\sqrt{2}$, то $MA+MB\geqslant\sqrt{2}$, а по условию $MA+MB=1$. Следовательно, уравнение не имеет решения.

104.8. 1) Указание. Необходимо доказать, что векторы $\overrightarrow{PM}$, $\overrightarrow{PK}$ и $\overrightarrow{PE}$ не являются компланарными.

2) Решением уравнения служат координаты всех точек отрезка AB, где $A(0;\ 0;\ 1)$ и $B(1;\ 0;\ 0)$. Указание. Задача решается аналогично задаче 104.7 (2).

105.1. 1) а) 4; б) 0. 2) 30°. **105.2.** 1) а) 2; б) 0. 2) 90°.

105.3. 1) а) 2; б) 0. 2) $180°-\arccos\frac{5}{13}$.

105.4. 1) а) 2; б) 0. 2) $\arccos\frac{3}{5}$.

105.5. 1) Примем векторы $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BA}$ за базисные. Тогда $\overrightarrow{MB}=-\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA})$, $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{BD}=-\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA})\cdot\overrightarrow{BD}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\times$ $\times\overrightarrow{BD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}=-\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}$.

2) Пусть $E(0;\ 0;\ z)$. Угол BEC будет острым, если $\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{EC}>0$, $\overrightarrow{EB}\{-10;\ 7;\ 9-z\}$, $\overrightarrow{EC}\{2;\ 6;\ -4-z\}$, $\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{EC}=-20+42-$ $-(4+z)\cdot(9-z)$. Отсюда следует, что $z^2-5z-14>0$. Тогда $z<-2$ или $z>7$. Следовательно, искомые точки имеют координаты $(0;\ 0;\ z)$, где $z<-2$ или $z>7$.

105.6. 1) -4. Указание. Задача решается аналогично задаче 105.5 (1).

2) $(x;\ 0;\ 0)$, где $-5\leqslant x\leqslant 8$. Указание. Необходимо учесть, что $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}\leqslant 0$.

105.7. 1) $S=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin B$;

$$S^2=\frac{1}{4}AB^2\cdot AC^2\sin^2 B=\frac{1}{4}AB^2\cdot AC^2(1-\cos^2 B)=$$

$$=\frac{1}{4}(AB^2\cdot AC^2-AB^2\cdot AC^2\cdot\cos^2 B)=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}^2\cdot\overrightarrow{AC}^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2).$$

Отсюда $S=\frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2\cdot\overrightarrow{AC}^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$.

2) Рассмотрим векторы $\vec{a}\{\sqrt{\sin^2 x+0{,}5};\ \sqrt{\cos^2 x-0{,}5};\ \sqrt{0{,}5}\}$, $\vec{b}\{1;\ 1;\ 1\}$. Их скалярное произведение:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{\sin^2 x+0{,}5}+\sqrt{\cos^2 x-0{,}5}+\sqrt{0{,}5}.$$

С другой стороны, $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi$, где $\varphi=\widehat{\vec{a};\ \vec{b}}$.

$$|\vec{a}|=\sqrt{\sin^2 x+0{,}5+\cos^2 x-0{,}5+0{,}5}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}};\ |\vec{b}|=\sqrt{3};$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{3}\cos\varphi=\frac{3}{\sqrt{2}}\cos\varphi.$$

Наибольшее значение скалярного произведения равно $\frac{3}{\sqrt{2}}$. Таким образом, наибольшее значение выражения $\sqrt{\sin^2 x+0{,}5}+$ $+\sqrt{\cos^2 x-0{,}5}+\sqrt{0{,}5}$ равно $3\sqrt{0{,}5}$. Оно достигается при $x=\pi k$, где $k\in\mathbf{Z}$.

105.8. 1) Указание. Задача решается аналогично задаче 105.7 (1).

2) Рассмотрим векторы $\vec{a}\{\sqrt{1+x};\ \sqrt{1-x}\}$ и $\vec{b}\{1;\ 1\}$. Их скалярное произведение: $\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$. С другой стороны,

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi$, где $\varphi=\widehat{\vec{a};\vec{b}}$. $|\vec{a}|=\sqrt{1+x+1-x}=\sqrt{2}$; $|\vec{b}|=\sqrt{2}$; $\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cos\varphi=2\cos\varphi$. Наибольшее значение скалярного произведения равно 2. Таким образом, наибольшее значение выражения $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+1$ равно 3. Оно достигается при $x=0$.

106.1. 1) 45°. 2) 0. **106.2.** 1) 30°. 2) 0.

106.3. 1) $-x^2$.

2) Необходимо доказать, что $\angle ACB=90°$, и тогда $AB=5$.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}\times$ $\times(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=25+0=25$.

106.4. 1) $3y^2$. 2) 100. Указание. Задача решается аналогично задаче 106.3 (2).

106.5. 1) $(\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})^2=0$, $\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}-2\vec{c}\cdot\vec{a}+2\vec{b}\cdot\vec{c}=0$, $9+16+25+2(\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{c}\cdot\vec{a})=0$, отсюда $\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{c}\cdot\vec{a}=-25$.

2) Пусть O — произвольная точка пространства. Тогда

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC})+$$
$$+(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OD})+(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})=$$
$$=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-$$
$$-\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0.$$

106.6. 1) -21. Указание. Задачи решаются аналогично задачам 106.5 (1, 2).

106.7. 1) $((\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}-(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b})\vec{c}=(\vec{b}\cdot\vec{c})\cdot(\vec{a}\cdot\vec{c})-(\vec{a}\cdot\vec{c})\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c})=0$. Этим и доказывается перпендикулярность данных векторов.

2) $\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{BC}^2-\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{BD}^2)=$

$$=\frac{1}{2}((\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC})+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD})\cdot(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BD}))=$$
$$=\frac{1}{2}((\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{CD}+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD})\cdot\overrightarrow{DC})=$$
$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}\cdot(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BD})=$$
$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}\cdot(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}\cdot2\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}.$$

106.8. Указание. Задачи решаются аналогично задачам 106.7 (1, 2).

107.1. 1) 45°. **107.2.** 1) 60°.

107.3. 1) $\arccos\frac{\sqrt{30}}{10}$.

2) Пусть точка O — основание высоты EO, а M — точка пересечения медиан грани EAB. Примем векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OE}$ за базисные. Тогда $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OE})$, а $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$,

$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}^2+\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}^2-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OE})=$ $=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OB}^2-\overrightarrow{OA}^2)=0$. Следовательно, $OM\perp AB$. Здесь было учтено, что $OB=OA$, $OE\perp OB$ и $OE\perp OA$.

107.4. 1) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{10}$.

2) Указание. Задача решается аналогично задаче 107.3 (2).

107.5. 1) Примем векторы $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{CC_1}$ за базисные и положим, что $AC=AB=BC=a$. Тогда длина бокового ребра равна $\frac{a}{\sqrt{5}}$; $\overrightarrow{AB_1}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CC_1}-\overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{BC_1}=\overrightarrow{CC_1}-\overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{BC_1}=\overrightarrow{CC_1}^2-\overrightarrow{CB}^2+$ $+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=\frac{a^2}{5}-a^2+\frac{a^2}{2}=-\frac{3a^2}{10}$. Здесь было учтено, что $CC_1\perp CA$ и $CC_1\perp CB$. $|\overrightarrow{AB_1}|=|\overrightarrow{BC_1}|=\frac{a\sqrt{6}}{\sqrt{5}}\cdot\cos\varphi=\frac{|\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{BC_1}|}{|\overrightarrow{AB_1}|\cdot|\overrightarrow{BC_1}|}=\frac{3a^2\cdot 5}{10\cdot 6a}=\frac{1}{4}$.

2) Рассмотрим пирамиду $DABC$. Пусть $AE\perp DBC$ и $E\in DF$, где DF — высота грани BDC. Нужно доказать, что $AD\perp BC$. По условию $\overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{DF}$. Это значит, что $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DF}=0$, но $\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AD}$. Тогда $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{BC}\cdot(\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AD})=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}=0$. Отсюда $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AF}$. $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{BC}\cdot(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF})=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{EF}=0$. Здесь было учтено, что $AE\perp BDC$, а значит, $AE\perp BC$. Кроме того, $DF\perp BC$, а потому и $EF\perp BC$ $(E\in DF)$. Из доказанного следует, что $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}=0$, т. е. $AD\perp BC$.

107.6. 1) $\arccos\frac{3\sqrt{7}}{14}$.

2) Указание. Задача решается аналогично задаче 107.5 (2).

107.7. 1) Прежде всего нужно доказать, что $A\notin BC$. Тогда рассмотрим треугольник BAC. $\overrightarrow{BA}\{10; 0; 0\}$, $\overrightarrow{BC}\{8; 6; 0\}$; $\cos ABC=$ $=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|}=\frac{80}{10\cdot 10}=\frac{4}{5}$. Пусть AF — высота треугольника ABC; $AF=AB\sin ABC=10\cdot\frac{3}{5}=6$.

2) Пусть длина диагонали равна d.

$$\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OC_1}+\overrightarrow{OC_1}\cdot\overrightarrow{OB_1}=\frac{d^2}{4}(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma) \quad (1)$$

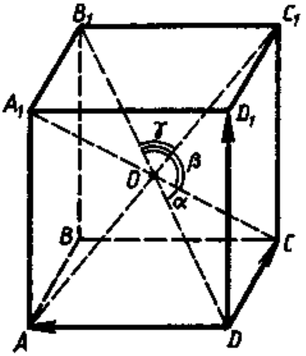

Рис. 345

(рис. 345). Примем векторы $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DC}$ и $\overrightarrow{DD_1}$ за базисные,

$$\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OC}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DB_1}\cdot\overrightarrow{CA_1}=$$
$$=\frac{1}{4}(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DD_1})\cdot(\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DC}+$$
$$+\overrightarrow{DD_1})=\frac{1}{4}(\overrightarrow{DA}^2-\overrightarrow{DC}^2+\overrightarrow{DD_1}^2).$$

Аналогично можно получить, что

$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OC_1}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{DA}^2+\overrightarrow{DC}^2-\overrightarrow{DD_1}^2)$ и

$\overrightarrow{OC_1}\cdot\overrightarrow{OB_1}=\frac{1}{4}(-\overrightarrow{DA}^2+\overrightarrow{DC}^2+\overrightarrow{DD_1}^2).$

Отсюда

$$\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OC_1}+\overrightarrow{OC_1}\cdot\overrightarrow{OB_1}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{DA^2}+\overrightarrow{DC^2}+\overrightarrow{DD_1}^2)=\frac{1}{4}d^2. \quad (2)$$

Из равенств (1) и (2) следует, что $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1$.

107.8. 1) $3\sqrt{2}$. Указание. Задачи решаются аналогично задачам 107.7 (1, 2).

108.1. 1) а) $(-100; -200; -1)$; б) $(100; 200; -1)$.

2) Так как при движении отрезок отображается на равный отрезок, каждая сторона треугольника отображается на равный ей отрезок, и, следовательно, треугольник отображается на треугольник с соответственно равными сторонами, т. е. на равный треугольник.

108.2. 1) а) $(-0{,}01; -0{,}02; -1)$; б) $(1; 1; 0)$.

2) Указание. Воспользуйтесь решением задачи 108.1 (2).

108.3. 1) а) Указание. Вычислите координаты середины отрезка AB. б) Указание. Вычислите координаты середины отрезка BC.

2) Рассмотрим двугранный угол, образованный полуплоскостями α и β с границей a и линейным углом ek, где лучи e и k принадлежат полуплоскостям α и β соответственно. Пусть при движении $a\to a_1$, $\alpha\to\alpha_1$, $\beta\to\beta_1$, $k\to k_1$, $e\to e_1$. Очевидно, что прямая a будет общей границей полуплоскостей α_1 и β_1, в которых будут соответственно лежать лучи e_1 и k_1. Так как при движении углы сохраняются, то $ek=e_1k_1$. Следовательно, при движении двугранный угол отображается на равный ему двугранный угол.

108.4. 1) а) $\{3; 3; 3\}$.

б) Указание. Найдите середину отрезка AB.

2) Пусть прямая AB пересекает плоскость α в точке A и образует с ней угол φ. Пусть C — проекция точки B на плоскость α. Проведем в плоскости α через точку C прямую b. Очевидно, что $BC\perp b$. Пусть при движении $\alpha\to\alpha_1$, $A\to A_1$, $B\to B_1$, $C\to C_1$, $b\to b_1$. Очевидно, что прямая A_1B_1 будет пересекать плос-

кость α_1, а прямые A_1C_1 и b_1 будут лежать в плоскости α_1. Так как при движении углы сохраняются, будет выполняться $B_1C_1 \perp b$, $B_1C_1 \perp A_1C_1$, $\angle B_1A_1C = \angle BAC$. Значит, $B_1C_1 \perp A_1C_1$ и $\angle B_1A_1C_1 = \angle BAC$. Следовательно, при движении прямая и плоскость, составляющие угол φ, отображаются на прямую и плоскость, составляющие угол φ.

108.5. 1) Заметим прежде всего, что точка A (10; 20; 0) лежит в плоскости Oxy. Пусть при осевой симметрии относительно прямой a точка A отображается на точку $B(x;\ y;\ z)$. Тогда середина отрезка AB — точка M имеет координаты (k; k; 0), где $k \neq 0$, так как принадлежит прямой a и не совпадает с началом координат O. Значит, $\overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MO}$ и $(10-k)k+(20-k)k=0$, откуда $k=15$. Используя формулы координат середины отрезка, получаем $15=\frac{10+x}{2}$, $15=\frac{20+y}{2}$, $0=\frac{0+z}{2}$, значит, $A_1(20;\ 10;\ 0)$.

2) При данном отображении пространства на себя произвольные точки $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$ переходят в точки $A_1(2x_1;\ 2y_1;\ 2z_1)$ и $B_1(2x_2;\ 2y_2;\ 2z_2)$. Пользуясь координатной формулой для нахождения расстояния между точками, находим, что $AB \neq A_1B_1$. Следовательно, данное отображение движением не является.

108.6. Указание. Задачи решаются аналогично задачам 108.5. 1) (0; 10; 20). 2) Да.

109.1. 1) Рассмотрим прямую a, перпендикулярную некоторой плоскости α, и две пересекающиеся прямые b и c, лежащие в плоскости α. Очевидно, что $a \perp b$ и $a \perp c$. Пусть при движении $a \to a_1$, $b \to b_1$, $c \to c_1$, $\alpha \to \alpha_1$. Легко доказать, что прямые c_1 и b_1 лежат в плоскости α_1, а прямая a_1 пересекает плоскость α_1. Так как при движении углы сохраняются, то $a_1 \perp b_1$ и $a_1 \perp c_1$. Значит, $a_1 \perp \alpha_1$, т. е. при движении прямая, перпендикулярная плоскости, отображается на прямую, перпендикулярную плоскости.

2) Очевидно, что если одна из двух параллельных прямых пересекает плоскость α, то и другая пересекает ее. Пусть данные прямые a и b пересекают данную плоскость α в точках A и B соответственно. Значит, при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{AB}$ $a \to b$, $\alpha \to \alpha$. Тогда по доказанному в пункте а) прямая b будет перпендикулярна плоскости α.

109.2. Указание. Задачи решаются аналогично задачам 109.1 (1, 2).

109.3. 1) Пусть дана правильная четырехугольная пирамида $EABCD$ с высотой EO. При симметрии относительно прямой EO $E \to E$, $A \to C$, $C \to A$, $B \to D$, $D \to B$, значит, квадрат $ABCD$ отображается на себя. Следовательно, EO — ось симметрии пирамиды.

2) Пусть H — произвольная точка пирамиды. Рассмотрим сечение пирамиды плоскостью EOH. Очевидно, оно является треугольником. По доказанному в пункте 1) при симметрии относительно прямой EO точка H отображается на точку H_1, принадле-

жащую пирамиде. Но очевидно также, что точка H_1 принадлежит плоскости EOH, т. е. принадлежит сечению. Последнее означает, что треугольник, полученный в сечении, отображается на себя при симметрии относительно прямой EO, проходящей через одну из его вершин. Значит, этот треугольник равнобедренный.

109.4. Указание. Задачи решаются аналогично задачам 109.3 (1, 2).

109.5. 1) Указание. Задача решается аналогично задаче 109.3 (1).

2) Проведем плоскость α через прямую c, содержащую середины противоположных ребер правильного тетраэдра. Пусть точка M принадлежит сечению тетраэдра плоскостью α. Тогда по доказанному в задаче 1 при симметрии относительно прямой c точка M отображается на точку M_1, принадлежащую одновременно плоскости α и тетраэдру. Значит, сечение при симметрии относительно прямой отобразится на себя. Возьмем теперь произвольную точку H, принадлежащую одной из двух частей, на которые плоскость α делит тетраэдр. По доказанному в пункте 1) при симметрии относительно прямой c точка H отображается на точку H_1, принадлежащую тетраэдру. По определению симметричных точек отрезок HH_1 пересекает прямую c, а значит, и плоскость α. Следовательно, точки H и H_1 принадлежат разным частям тетраэдра. Значит, эти части отображаются друг на друга при симметрии относительно прямой c. Отсюда следует, что плоскость α делит тетраэдр на две равные части.

109.6. Указание. Задачи решаются аналогично задачам 109.5 (1, 2).

110.1. 2) 54π см^2. **110.2.** 2) 24π см^2.

110.3. 1) $\left(\frac{6}{\pi}+4\sqrt{3}\right)$ см^2. 2) $24\sqrt{3}$ см. Указание. Необходимо через указанную прямую провести плоскость, параллельную оси цилиндра. Тогда расстояние от этой плоскости до оси цилиндра равно 5 см.

110.4. 1) $\left(\frac{8}{\pi}+16\sqrt{3}\right)$ см^2. 2) 25 см.

110.5. 1) Пусть плоскости сечений пересекают основание цилиндра по хордам AB и BC. Положим, что высота цилиндра равна h. Тогда $AB=\frac{11}{h}$ и $BC=\frac{13}{h}$. По теореме косинусов находим, что $AC=\frac{7\sqrt{3}}{h}$. С другой стороны, $AC=2R\sin 60°$, где R — радиус основания цилиндра. Отсюда следует, что $R=\frac{7}{h}$. Тогда $S_{\text{бок}}=2\pi Rh=2\pi\cdot\frac{7}{h}\cdot h=14\pi$, $S_{\text{бок}}=14\pi$ см^2.

2) Данная плоскость пересекает основания цилиндра по хордам AB и CD (рис. 346), причем $AB\parallel CD$. Можно доказать, что расстояние между хордами AB и CD равно длине EF, где E и F — середины этих хорд. По условию $EF=9$ см. Спроектируем хорду

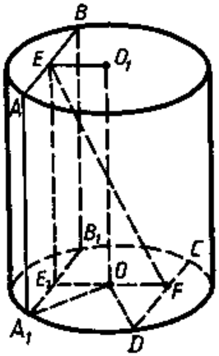

Рис. 346

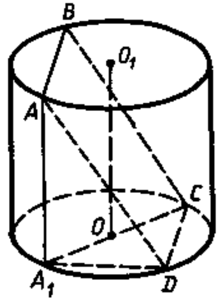

Рис. 347

AB на плоскость нижнего основания. Из рассмотрения прямоугольных треугольников A_1OE_1 и DOF следует, что $OE_1=4$ и $OF=3$. Тогда $E_1F=7$. Высота цилиндра EE_1 находится из треугольника EE_1F и равна $4\sqrt{2}$. Тогда $S_{бок}=2\pi rh=2\cdot5\cdot4\sqrt{2}\pi=$ $=40\pi\sqrt{2}$ см^2. Площадь полной поверхности

$$S=40\pi\sqrt{2}+50\pi=10\pi(5+4\sqrt{2}) \text{ см}^2.$$

110.6. 1) Пусть плоскости сечений пересекают основание цилиндра по хордам AC и AB. Положим, что высота цилиндра равна h. Тогда, учитывая условие, $AC=AB=\frac{10\sqrt{5}}{h}$ и $BC=\frac{40}{h}$. Пусть AE — высота треугольника CAB, $AE=\sqrt{\frac{500}{h^2}-\frac{400}{h^2}}=\frac{10}{h}$. Площадь этого треугольника $S=\frac{200}{h^2}$; радиус основания цилиндра $R=\frac{AC\cdot AB\cdot BC}{4S}=\frac{25}{h}$. Тогда площадь боковой поверхности цилиндра $S_{бок}=2\pi Rh=2\pi\cdot\frac{25}{h}\cdot h$, $S_{бок}=50\pi$ см^2.

2) Спроектируем вершину квадрата A на плоскость нижнего основания (рис. 347). Так как $ABCD$ — квадрат, то по теореме о трех перпендикулярах можно доказать, что $A_1D\perp DC$. В таком случае A_1C — диаметр окружности нижнего основания, $A_1C=$ $=14$ см. Из прямоугольного треугольника A_1DC следует, что $A_1D=\sqrt{196-100}$ см $=\sqrt{96}$ см. Высоту цилиндра AA_1 находим из треугольника AA_1D. Она равна 2 см. $S_{бок}=2\pi Rh=2\pi\cdot7\cdot2$ см^2. Площадь основания $S_{осн}=\pi R^2=49\pi$ см^2. Тогда площадь поверхности цилиндра $S=126\pi$ см^2.

111.1. 1) $36\pi(\sqrt{2}+1)$ см^2. 2) 154π см^2.

111.2. 1) $64\pi(3+2\sqrt{3})$ см^2. 2) 896π см^2.

111.3. 1) $128\pi(\sqrt{2}+1)$ см^2. 2) 2 см; 14 см.

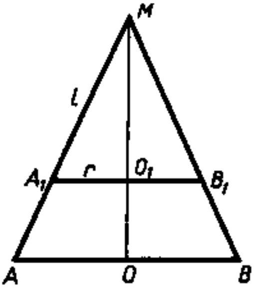

Рис. 348

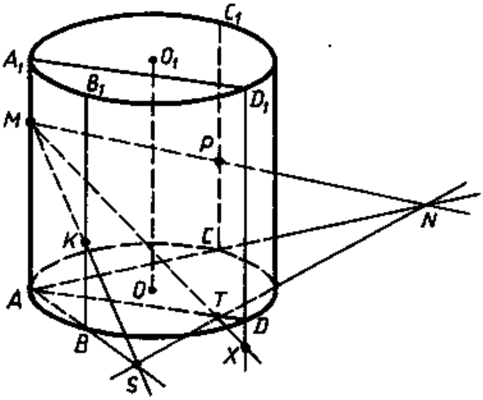

Рис. 349

111.4. 1) $16\pi(3+2\sqrt{3})$ см^2. 2) 176π см^2.

111.5. 1) Центральный угол развертки боковой поверхности конуса $\alpha=\frac{R}{L}360°$. Так как $\alpha=120°$, то $\frac{R}{L}=\frac{1}{3}$ и $L=3R$. Тогда периметр осевого сечения $P=2L+2R=8R$; $8R=16$, $R=2$, $L=6$. Отсюда $S=16\pi$ см^2.

2) Пусть r — радиус основания меньшего конуса, а l — его образующая. Тогда площадь полной поверхности этого конуса равна $\pi rl+\pi r^2$ (рис. 348). Площадь полной поверхности усеченного конуса равна $\pi(16-l)(r+10)+\pi r^2+100\pi$. По условию эти площади равны. Тогда $\pi(16-l)(r+10)+\pi r^2+100\pi=\pi rl+\pi r^2$. Отсюда $2lr-16r+10l=260$ (*). Из подобия треугольников MO_1A_1 и MOA следует, что $\frac{r}{l}=\frac{5}{8}$, т. е. $r=\frac{5}{8}l$. Подставив это выражение в равенство (*), получим $\frac{5l^2}{4}-10l+10l=260$, $l^2=13\cdot16$ и $l=4\sqrt{13}$, $\frac{MO_1}{MO}=\frac{MA_1}{MA}=\frac{\sqrt{13}}{4}$. Отсюда $\frac{MO_1}{O_1O}=\frac{\sqrt{13}}{4-\sqrt{13}}$.

111.6. 1) 96π см^2. 2) $1:(\sqrt{2}-1)$.

111.7. 1) Построение показано на рисунке 349.

2) Если конус катится по плоскости вокруг неподвижной вершины, то его высота MF описывает коническую поверхность с радиусом, равным FO (рис. 350); $\cos FMB=\frac{H}{L}$, $ME=MF\times$ $\times\cos FMB=H\cdot\frac{H}{L}=\frac{H^2}{L}$, $FO=ME$. Площадь поверхности, описанной высотой, равна $S=\pi\cdot MF\cdot FO=\pi H\cdot\frac{H^2}{L}=\frac{\pi H^3}{L}$.

111.8. 1) Указание. Задача решается аналогично задаче 117 (1).

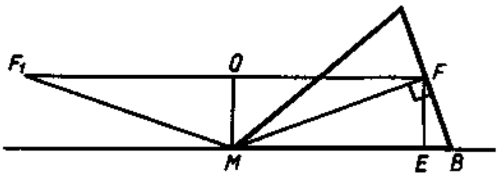

Рис. 350

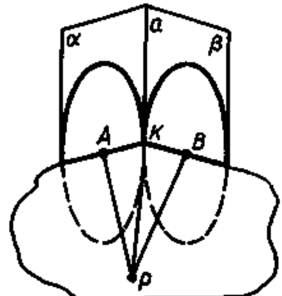

Рис. 351

2) Пусть 2β — величина угла при вершине осевого сечения конуса. Докажем вначале, что угол между высотами двух смежных конусов равен этому углу. Пусть A и B — центры оснований двух соседних конусов с общей вершиной P (рис. 351). Тогда плоскость PAB, содержащая высоты конусов, будет перпендикулярна плоскостям оснований конусов α и β, а следовательно, будет перпендикулярна прямой a пересечения плоскостей α и β. Прямая a будет общей касательной к окружностям оснований. Осталось доказать, что точка касания K принадлежит плоскости APB. Очевидно, что $AK \perp a$ и $BK \perp a$. Значит, прямая a перпендикулярна плоскости AKB. Но через точку B можно провести единственную плоскость, перпендикулярную прямой a. Поэтому плоскости AKB и APB совпадают. Таким образом, $\angle APB = \angle APK + \angle BPK = 2\beta$. Очевидно, что общая вершина конусов и центры их оснований являются вершинами некоторой правильной шестиугольной пирамиды $PABCDEF$ (рис. 352). При этом угол между высотой пирамиды OP и боковым ребром равен $90° - \beta$. В пирамиде $OB = PB \cdot \cos\beta$, $AB = OB = PB \cdot \cos\beta$. Тогда, учитывая, что $\angle APB = 2\beta$ по доказанному, из треугольника

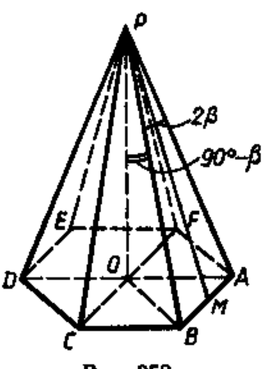

Рис. 352

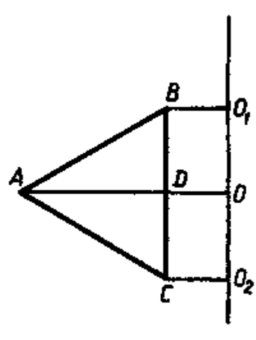

Рис. 353

PMB получим $\frac{PB\cdot\cos\beta}{2}=PB\cdot\sin\beta$. Отсюда $\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{2}$ и $\beta=$ $=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$, $2\beta=2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$.

112.1. $\frac{32\pi(1+\sqrt{3})}{\sqrt{3}}$ см^2. **112.2.** 16π см^2.

112.3. 3840π см^2. **112.4.** 96π см^2.

112.5. Обозначим через S_a площадь поверхности, которая образуется при вращении отрезка a вокруг оси. Тогда искомая площадь $S_{пов}=S_{AB}+S_{AC}+S_{BC}=\pi(AO+BO_1)+\pi AC\cdot(AO+BO_1)+$ $+2\pi BC\cdot DO=\pi(AO+BO_1)\cdot(AB+AC)+2\pi BC\cdot DO$ (рис. 353). Площадь треугольника ABC находим по формуле Герона:

$$S=\sqrt{35\cdot 7\cdot 18\cdot 10}=210\text{ см}^2;\ AD=\frac{420}{17}.$$

$$S_{пов}=\pi\left(\frac{420}{17}+40\right)+2\pi 17\cdot 20.\ S_{пов}=\frac{69\,860}{17}\pi\text{ см}^2.$$

112.6. $\frac{12\,600}{13}\pi$ см^2.

113.1. 1) а) $(x-3)^2+y^2+z^2=16$; б) да, нет. 2) 13 см.
113.2. 1) а) $x^2+y^2+(z-4)^2=9$; б) нет, да. 2) 13 см.
113.3. 1) а) $x^2+(y+0{,}5)^2+z^2=17$; б) да, нет. 2) 4 см.
113.4. 1) а) $x^2+(y-0{,}5)^2+z^2=14$; б) нет, да. 2) 9 см.
113.5. 1) Указанная плоскость пересекает плоскость Ozy по прямой AB, где $A\left(0;\ 0;\ \frac{8\sqrt{3}}{3}\right)$ и $B(0;\ 8;\ 0)$. Можно доказать, что расстояние от центра сферы до этой плоскости равно высоте OK прямоугольного треугольника AOB. Из того, что $OA=\frac{8\sqrt{3}}{3}$ и $OB=8$, находим, что $OK=4$. Так как расстояние от центра до плоскости меньше радиуса сферы, то можно утверждать, что плоскость и сфера пересекаются. Радиус сечения $r=\sqrt{R^2-d^2}$, где d — расстояние от центра до плоскости. Тогда $r=$ $=\sqrt{25-16}=3$. Длина линии пересечения равна 6π.

2) $147\sqrt{3}$ см^2. Указание. Необходимо доказать, что треугольник является правильным.

113.6. 1) Да; 16π. Указание. Указанная плоскость проходит через точки $(6\sqrt{2};\ 0;\ 0)$ и $(0;\ 6\sqrt{2};\ 0)$. Дальнейшее решение аналогично решению задачи 113.5 (1). 2) 10 см.

113.7. 1) Данные уравнения необходимо переписать в виде $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=25$ и $x^2+(y-4)^2+(z+3)^2=4$. Координаты центров сфер: $O_1(1;\ 2;\ -3)$, $O_2(0;\ 4;\ -3)$. Радиусы сфер соответственно: $R_1=5$, $R_2=2$. Расстояние между центрами сфер:

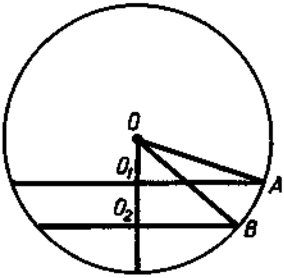

Рис. 354

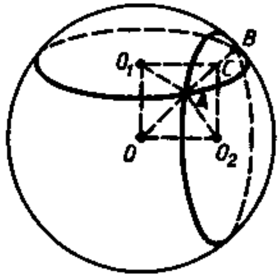

Рис. 355

$d=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$, $d<R_1-R_2$. Значит, сферы не пересекаются и шары не имеют общих точек.

2) Расстояние от точки O до граней $ABCD$, AA_1B_1B и AA_1D_1D равно 10 см, что меньше радиуса сферы. Следовательно, сфера пересекает плоскости ABC, AA_1B и AA_1D и радиусы сечений равны $5\sqrt{5}$ см. Расстояния до остальных граней больше радиуса сферы, а потому сфера не имеет с ним общих точек.

113.8. 1) Да.

2) Сфера пересекает плоскости ABC, ABB_1 и ADD_1. В первом случае радиус сечения равен 6 см, а в двух других $2\sqrt{5}$ см.

114.1. 1) 676π см^2. 2) 4π дм. **114.2.** 1) 400π см^2. 2) 6π см^2.

114.3. 1) 676π см^2. 2) $4\sqrt{2}$ дм. **114.4.** 1) 676π см^2. 2) 36π см^2; 36π см^2.

114.5. 1) Пусть радиус сферы равен R, а радиусы сечений R_1 и R_2 (рис. 354). Тогда $R_1=O_1A=\sqrt{R^2-\frac{R^2}{9}}=\frac{2R\sqrt{2}}{3}$, $R_2=O_2B=$ $=\sqrt{R^2-\frac{4R^2}{9}}=\frac{R\sqrt{5}}{3}$. Используя условие, имеем $2\pi\cdot\frac{2R\sqrt{2}}{3}-$ $-2\pi\cdot\frac{R\sqrt{5}}{3}=6(2\sqrt{2}-\sqrt{5})\pi$, $\quad R(2\sqrt{2}-\sqrt{5})=9(2\sqrt{2}-\sqrt{5})$, $R=9$. Площадь сферы $S=4\pi\cdot 81$, $S=324\pi$ см^2.

2) Радиусы сечений $r_1=10$ см и $r_2=8$ см, $AC=6$ см (рис. 355). Из прямоугольного треугольника ACO_2 следует, что $CO_2=\sqrt{64-36}$, $CO_2=\sqrt{28}$ см. Из прямоугольного треугольника OO_1A следует, что $R=\sqrt{100+28}=\sqrt{128}$, $R=8\sqrt{2}$ см.

114.6. 1) 144π см^2. 2) 4 см; 5 см.

115.1. 1) 3π см^2. 2) $240\sqrt{2}\pi$ см^2. **115.2.** 1) 64π см^2. 2) 12π см^2.

115.3. 1) $\frac{256}{3}\pi$ см^2. Указание. Центр сферы лежит в точке пересечения серединного перпендикуляра к боковому ребру пирамиды с ее высотой. Так как угол наклона боковых ребер к плоскости основания больше 45°, то центр сферы находится выше этой плоскости.

2) $4\sqrt{5}\pi$ см^2.

115.4. 1) 16π см^2. Указание. Необходимо из центра основания пирамиды опустить перпендикуляр на сторону основания и его основание соединить с вершиной пирамиды. Получим линейный угол двугранного угла, образованного боковой гранью с плоскостью основания. Центр сферы лежит в точке пересечения биссектрисы этого угла с высотой пирамиды.

2) $35\sqrt{5}\pi$ см^2.

115.5. 1) Вершина пирамиды M проектируется в центр описанной вокруг основания окружности. Центр описанной сферы лежит в точке пересечения серединного перпендикуляра EO к ребру AM с высотой пирамиды MO_1 (рис. 356). Чертеж дан для случая, когда $\varphi > 45°$. Если же $\varphi < 45°$, то центр сферы расположен ниже плоскости основания, а при $\varphi = 45°$ центр сферы совпадает с центром описанной около основания окружности. Решение задачи для всех случаев совпадает. Радиус окружности, описанной около основания, $R = \frac{a}{2\sin\alpha}$; $AM = \frac{a}{2\sin\alpha\cdot\cos\varphi}$; $EM = \frac{a}{4\sin\alpha\cdot\cos\varphi}$. В прямоугольном треугольнике MEO $\angle MOE = \varphi$. Тогда радиус сферы $R_{\text{сферы}} = MO = \frac{a}{4\sin\alpha\cdot\cos\varphi\cdot\sin\varphi} = \frac{a}{2\sin\alpha\cdot\sin 2\varphi}$. $S_{\text{сферы}} = \frac{\pi a^2}{\sin^2\alpha\cdot\sin^2 2\varphi}$.

2) В прямоугольном треугольнике EKF (рис. 357) $EK = 4\sqrt{3}$, $\angle EFK = 60°$. Тогда $KF = EK \operatorname{ctg} 60° = 4$, $OK = OF - KF = 1$. Отсюда следует, что площадь боковой поверхности цилиндра $S = 2\pi OK\cdot EK = 2\pi\cdot 1\cdot 4\sqrt{3}$, $S = 8\sqrt{3}\pi$ см^2.

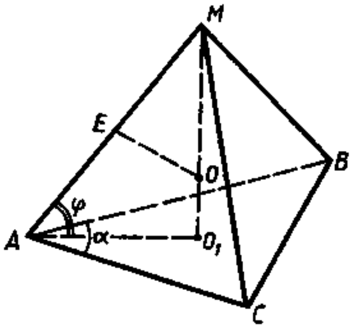

Рис. 356

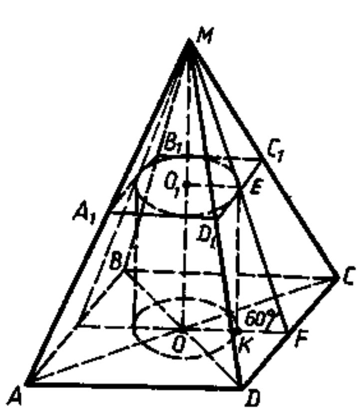

Рис. 357

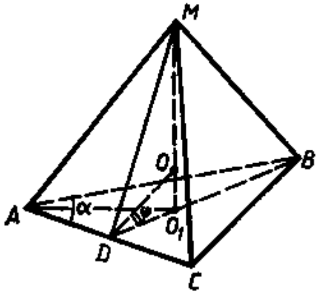

Рис. 358

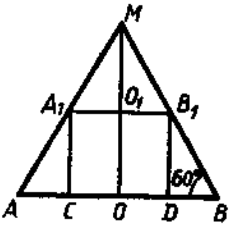

Рис. 359

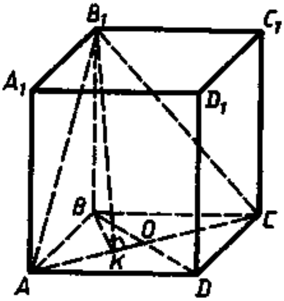

Рис. 360

115.6. 1) Вершина пирамиды M проектируется в центр вписанной в основание окружности. Центр вписанной в пирамиду сферы лежит в точке пересечения биссектрисы угла MDB с высотой пирамиды MO_1 (рис. 358). $AD = a \cdot \cos\alpha$, $O_1D = AD \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = a\cos\alpha \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Радиус вписанной сферы $R_{\text{сферы}} = OO_1 = O_1D \cdot \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = a \cdot \cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$.

$$S_{\text{сферы}} = 4\pi a^2 \cos^2\alpha \cdot \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}.$$

2) На рисунке 359 изображено осевое сечение конуса вместе с осевым сечением вписанного в конус цилиндра. $MO_1 = MO - OO_1 = 10\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$, $O_1B_1 = MO \operatorname{ctg} 60° = 6$. Площадь боковой поверхности цилиндра $S = 2\pi \cdot O_1B_1 \cdot OO_1 = 2\pi \cdot 6 \cdot 4\sqrt{3}$, $S = 48\sqrt{3}$ см^3.

116.1. 1) $780\sqrt{3}$ см^3. 2) $12(3+\sqrt{5})$ см^2.

116.2. 1) $1280\sqrt{3}$ см^3. 2) $8 \cdot (5+\sqrt{13})$ см^2.

116.3. 1) $\frac{m^3\sqrt{2}}{8}$. 2) 18 см^3.

116.4. 1) $\frac{d^3\sqrt{2}}{8}$. 2) 36 см^3.

116.5. 1) Из точки B опустим перпендикуляр BK на AC и точки B_1 и K соединим (рис. 360); $\angle B_1KB = 60°$, так как это линейный угол двугранного угла, образованного плоскостью сечения с плоскостью основания; $BO = \frac{m}{2}$, $BK = \frac{m}{2} \cdot \sin 60° = \frac{m\sqrt{3}}{4}$. Из треугольника B_1BK имеем $BB_1 = BK \operatorname{tg} 60° = \frac{3m}{4}$. $S_{\text{осн}} = \frac{m^2\sqrt{3}}{4}$; $V = \frac{m^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{3m}{4} = \frac{3m^3\sqrt{3}}{16}$.

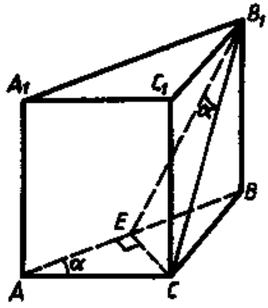

Рис. 361

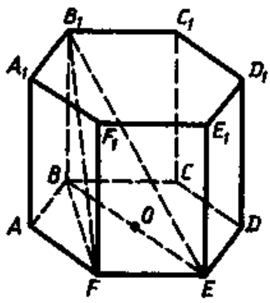

Рис. 362

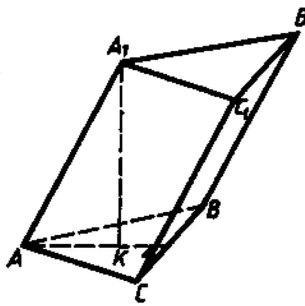

Рис. 363

2) $CE \perp AA_1B_1$ (рис. 361), $\angle CB_1E = \alpha$, так как это угол между прямой B_1C и плоскостью AA_1B_1. Прямоугольные треугольники AEC и CEB_1 равны, а потому $B_1C = b$, $BC = b \operatorname{tg} \alpha$. Из треугольника B_1BC следует, что $BB_1 = \sqrt{b^2 - b^2 \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{b}{\cos \alpha}\sqrt{\cos 2\alpha}$.

$S_{ABC} = \frac{b^2 \operatorname{tg} \alpha}{2}$; $V = S_{ABC} \cdot BB_1 = \frac{b^3 \operatorname{tg} \alpha \sqrt{\cos 2\alpha}}{2 \cos \alpha}$.

116.6. 1) $\frac{d^3}{16}$. 2) $\frac{m^3 \operatorname{ctg} \alpha \sqrt{-\cos 2\alpha}}{2 \sin \alpha}$.

117.1. 1) $480\sqrt{3}$. 2) $8\pi a^3$. **117.2.** 1) 64 см^3. 2) 3468π.

117.3. 1) $192\sqrt{3}$ см^3. Указание. Воспользуйтесь тем, что площадь основания призмы равна площади сечения, умноженной на косинус угла между плоскостями сечения и основания.

2) $\frac{\pi RQ}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}$.

117.4. 1) 324 см^3. 2) $\frac{\pi S^2}{4H \cos^2 \frac{\varphi}{2}}$.

117.5. 1) Можно доказать, что треугольник B_1FE прямоугольный с прямым углом B_1FE (рис. 362). $FE = \sqrt{25^2 - 24^2} = 7$, $BE = 14$. Из треугольника B_1BE следует, что $BB_1 = \sqrt{625 - 196} = \sqrt{429}$; $S_{осн} = \frac{147\sqrt{3}}{2}$; $V = S_{осн} \cdot BB_1 = \frac{147\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3 \cdot 143} = \frac{441\sqrt{143}}{2}$.

2) $\frac{\pi a^3 \operatorname{tg} \alpha}{4(\operatorname{tg} \alpha + 2)^3}$. Указание. См. решение задачи 115.5 (2).

117.6. 1) $\frac{9\sqrt{2}}{2}$. 2) $\frac{m a^3 \sqrt{3} \operatorname{tg}^3 \alpha}{36(\operatorname{tg} \alpha + 2)^3}$. Указание. Задачи решаются аналогично задачам 117.5 (1, 2).

118.1. 1) $\frac{243}{4}$. 2) $30\sqrt{3}$ см³. 118.2. 1) $48\sqrt{3}$. 2) $60\sqrt{3}$ см³.

118.3. 1) $\frac{125\sqrt{3}}{2}$ см². Указание. Докажите, что наклонные боковые грани — квадраты.

2) $\frac{a^2b\sqrt{3}}{12}$. Указание. Предварительно нужно доказать, что боковое ребро AA_1 перпендикулярно стороне основания BC. После этого постройте перпендикулярное сечение призмы плоскостью, проходящей через BC, и найдите его площадь.

118.4. 1) $\frac{343\sqrt{2}}{4}$ см³. Указание. Докажите, что грань, проходящая через другой катет,— квадрат.

2) $\frac{m^2l}{4}$. Указание. Задача решается аналогично задаче 118.3 (2).

118.5. 1) Так как все ребра призмы равны между собой и $\angle A_1AC=\angle A_1AB=60°$, то $A_1A=A_1B=A_1C$ и вершина A_1 проектируется в центр правильного треугольника ABC (рис. 363). Используя теорему о трех перпендикулярах, можно доказать, что $BC\perp AA_1$, а так как $AA_1\parallel CC_1$, то $CC_1\perp CB$. Учитывая условие, можно утверждать, что CC_1B_1B — квадрат. Так как $S_{CC_1B_1B}=Q$, то ребро призмы равно $\sqrt{Q}$ и $AK=\frac{\sqrt{Q}}{\sqrt{3}}$. Из треугольника AA_1K следует, что $A_1K=\sqrt{Q-\frac{Q}{3}}=\frac{\sqrt{2Q}}{\sqrt{3}}$; $S_{ABC}=\frac{Q\sqrt{3}}{4}$; $V=S_{ABC}\cdot A_1K=\frac{Q\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{\sqrt{2Q}}{\sqrt{3}}=$
$=\frac{Q\sqrt{2Q}}{4}$.

2) Расстояние от бокового ребра до диагонали противоположной грани равно расстоянию от бокового ребра до этой грани. Построим перпендикулярное сечение призмы. Пусть d — расстояние от бокового ребра до противолежащей боковой грани, m — сторона перпендикулярного сечения, противолежащая этому боковому ребру, и l — боковое ребро призмы. $V=S_{\text{перп. сеч.}}\cdot l=\frac{1}{2}d\cdot m\cdot l=\frac{1}{2}d\cdot Q$, где Q — площадь боковой грани. Тогда $V=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 40=100$ см³.

118.6. 1) Так как $\angle A_1AD=\angle A_1AB$, то вершина A_1 проектируется на биссектрису угла BAD, т. е. на диагональ ромба AC (рис. 364). Используя теорему о трех перпендикулярах, можно доказать, что $BD\perp AA_1$. Тогда BB_1D_1D — прямоугольник. Пусть длина ребра параллелепипеда равна m. Учитывая условие, имеем $m^2\sqrt{2}=S$ и $m=\frac{S}{\sqrt[4]{2}}$. Опустим перпендикуляр A_1E на AD и соединим точки E и K, тогда $EK\perp AD$. Из прямоугольных треугольников A_1EA, KEA и A_1KA получим $AE=\frac{m}{2}$, $AK=\frac{m\sqrt{2}}{2}$, $A_1K=\sqrt{m^2-\frac{2m^2}{4}}=\frac{m\sqrt{2}}{2}$. $S_{ABCD}=m^2$, $V=S_{ABCD}\cdot A_1K=\frac{m^3\sqrt{2}}{2}$, а так как $m=\frac{\sqrt{S}}{\sqrt[4]{2}}$, то $V=\frac{S\sqrt{S}}{2\sqrt[4]{2}}$.

2) $30\sqrt{2}$ см³. Указание. Задача решается аналогично задаче 118.5 (2).

119.1. 1) 24 см³. 2) $\frac{H^3\sqrt{3}}{3}$. **119.2.** 1) $72\sqrt{6}$ см³. 2) $\frac{a^3\sqrt{3}}{27}$.

119.3. 1) $\frac{4m^3}{3\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha}$. 2) $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

119.4. 1) $\frac{a^3\sqrt{3}}{\sin^2\varphi\cdot\cos\varphi}$. 2) $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

119.5. 1) Из точки E (рис. 365) опускаем перпендикуляр EF на ребро DB и точку F соединяем с точками A и C; $\angle AFC=\alpha$ — линейный угол двугранного угла, образованного двумя смежными боковыми гранями. Из подобия треугольников DOB и EFB следует, что $\frac{DO}{EF}=\frac{OB}{FB}$, отсюда $DO=\frac{EF\cdot OB}{FB}$, $EF=\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, $OB=\frac{a}{\sqrt{3}}$.

Из треугольника EFB следует, что

$$FB=\sqrt{\frac{3a^2}{4}-\frac{a^2}{4}\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{a}{2}\sqrt{3-\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Тогда

$$DO=\frac{a\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\cdot a\cdot 2}{2\sqrt{3}\cdot a\sqrt{3-\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}}}=\frac{a\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3-\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}}}.$$

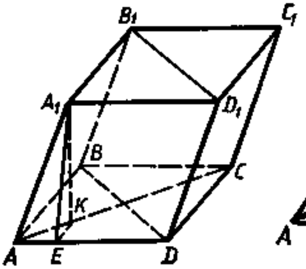

Рис. 364

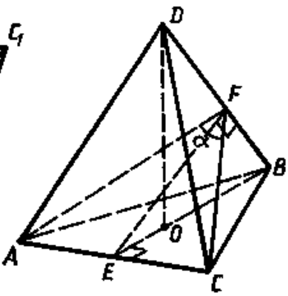

Рис. 365

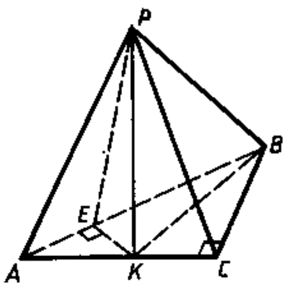

Рис. 366

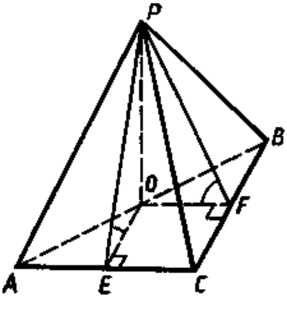

Рис. 367

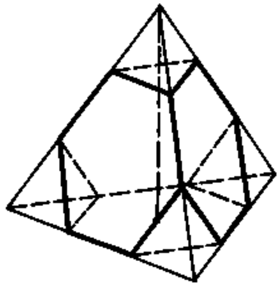

Рис. 368

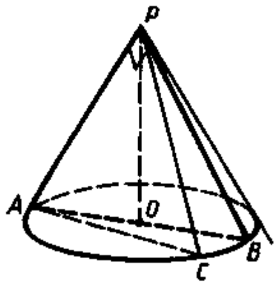

Рис. 369

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{a\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3-\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}}}=\frac{a^3\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{12\sqrt{3-\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}}}.$$

Примечание. Ответ может быть получен и в такой форме:

$$V=\frac{a^3\cos\frac{\alpha}{2}}{12\sqrt{4\sin^2\frac{\alpha}{2}-1}}.$$

2) Так как плоскости APC и ABC взаимно перпендикулярны, то высота пирамиды PK принадлежит грани APC (рис. 366). Учитывая, что две остальные боковые грани составляют с плоскостью основания равные углы, можно доказать, что BK — биссектриса угла ABC. $\angle KBC=30°$; $KC=a\cdot\operatorname{tg}30°=\frac{a}{\sqrt{3}}$; $PK=KC=\frac{a}{\sqrt{3}}$; $S_{ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$; $V=\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{a}{\sqrt{3}}=\frac{a^3}{6}$.

119.6. 1) $\dfrac{a^3\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{6\sqrt{-\cos\alpha}}$. Указание. Задача решается аналогично задаче 119.5 (1).

2) $PO\perp ABC$ (рис. 367), $\angle PEO=\angle PFO=45°$ — линейные углы двугранных углов, которые образуют боковые грани с плоскостью основания. Можно доказать, что $EOFC$ — квадрат, и, приняв его сторону за x, составить уравнение $a=x+\frac{x}{\sqrt{3}}$. Отсюда $x=\frac{a\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{2}$. Высота пирамиды $H=x=\frac{a\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{2}$. $S_{ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$; $V=\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{2}=\frac{a^3(\sqrt{3}-1)}{4}$.

119.7. Объем правильного тетраэдра с ребром, равным a, равен $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. Ребро каждого срезанного тетраэдра равно $\frac{a}{3}$

(рис. 368). Тогда его объем равен $\frac{a^3\sqrt{2}}{324}$. Объем многогранника равен $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}-4\cdot\frac{a^3\sqrt{2}}{324}=\frac{23a^3\sqrt{2}}{324}$. Тогда

$$\frac{V_{\text{многогранника}}}{V_{\text{тетраэдра}}}=\frac{23a^3\sqrt{2}}{324}:\frac{a^3\sqrt{2}}{12}=\frac{23}{27}.$$

119.8. $\frac{8}{9}$. Указание. Задача решается аналогично задаче 119.7.

120.1. 1) 20 см^3. 2) $\frac{\pi a^3\sqrt{2}}{12}$.

120.2. 1) 120 см^3. 2) $\frac{\pi a^3}{9}$.

120.3. 1) $\frac{16\pi\sqrt{2}}{3}$. 2) $\frac{\pi m^3}{81\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha}$.

120.4. 1) $\frac{32\pi\sqrt{5}}{3}$. 2) $\frac{8\pi d^3}{3\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha}$.

120.5. 1) Если осевым сечением конуса является тупоугольный треугольник, то наибольшую площадь имеет сечение со взаимно перпендикулярными образующими. $S_{APC}=\frac{L^2}{2}$, $S_{APB}=\frac{1}{2}L^2\cdot\sin APB$ (рис. 369). По условию задачи $\frac{L^2}{2}=L^2\cdot\sin APB$, $\sin APB=\frac{1}{2}$ и $\angle APB=150°$, тогда $\angle PAO=15°$, $R=AO=L\cos 15°$, $H=L\cdot\sin 15°$. $V=\frac{1}{3}\pi L^2\cos^2 15°\cdot L\sin 15°=\frac{1}{12}\pi L^3\cos 15°$.

2) 60°. Указание. Необходимо воспользоваться тем, что сумма оснований трапеции равна сумме ее боковых сторон. Тогда боковые стороны равны 5 см и не представляет труда найти диаметр основания конуса, т. е. высоту трапеции.

120.6. 1) $\frac{1}{3}\pi H^3\,\mathrm{tg}^2\,67°30'=\frac{1}{3}\pi H^3(\sqrt{2}+1)^2$. Указание. Задача решается аналогично задаче 120.5 (1).

2) 45°. Указание. Необходимо доказать, что основание трапеции является диаметром основания конуса и равно 6 см.

120.7. На рисунке 370 FM, FO и MO соответственно образующая, высота и радиус основания конуса. Зная длины сторон треугольника CMB, можно найти радиус описанной около него окружности: $MO=\frac{25}{4}$. Из треугольника AME, где $AM=10$, $ME=8$ и $AE=6\sqrt{3}$, находим косинус угла AME: $108=100+64-2\cdot 80\cos AME$, $\cos AME=\frac{7}{20}$. Тогда $\mathrm{tg}\,AME=\frac{3\sqrt{39}}{7}$, $FO=MO\cdot\mathrm{tg}\,AME=\frac{25}{4}\cdot\frac{3\sqrt{39}}{7}=\frac{75\sqrt{39}}{28}$. $V=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot\frac{625}{16}\cdot\frac{75\sqrt{39}}{28}=\frac{15\,625\pi\sqrt{39}}{448}$.

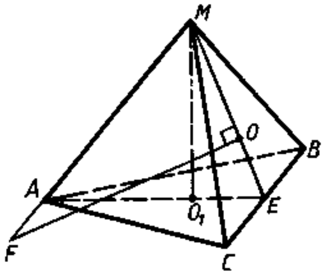

Рис. 370

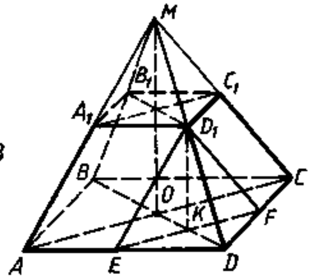

Рис. 371

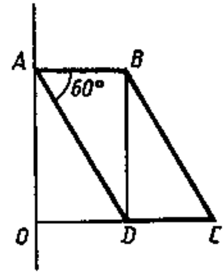

Рис. 372

120.8. $\frac{15\,625\pi\sqrt{15}}{1344}$ см^3. Указание. Задача решается аналогично задаче 120.7.

121.1. 1) $\frac{7\sqrt{3}}{3}$ см^3. 2) $\frac{4\pi a^3}{3}$. **121.2.** 1) $\frac{7}{12}$ см^3. 2) $\frac{5\pi a^3}{3}$.

121.3. 1) $\frac{14\sqrt{3}}{3}$ см^3. 2) 576π. **121.4.** 1) 7 см^3. 2) 8064π.

121.5. 1) На рисунке 371 ED_1F — сечение плоскостью, проходящей через вершину D_1 и перпендикулярной B_1D_1. Необходимо отметить, что $EF \parallel AC$, $D_1E \parallel AA_1$ и $D_1F \parallel CC_1$; $ED = AD - A_1D_1 = 4$; $EF = 4\sqrt{2}$; $S_{ED_1F} = \frac{1}{2}EF \cdot D_1K$, где D_1K — высота пирамиды. По условию $S_{ED_1F} = 6\sqrt{2}$. Отсюда следует, что $D_1K = 3$.

$$V = \frac{1}{3}\cdot 3\,(100+36+\sqrt{100\cdot 36})\text{ см}^3 = 196\text{ см}^3.$$

2) Объем тела вращения $V = V_{ABCO} - V_{ADO}$ (рис. 372);

$$V = \frac{1}{3}\pi\cdot AO\,(AB^2+OC^2+AB\cdot OC) - \frac{1}{3}\pi AO\cdot OD^2 =$$

$$= \frac{1}{3}\pi\cdot AO\,(OC^2+AB\cdot OC) = \frac{1}{3}\pi AO\cdot OC\,(OC+AB);$$

$$AO = 3\sqrt{3},\ OD = 3,\ OC = 6.$$

$$V = \frac{1}{3}\pi\cdot 3\sqrt{3}\cdot 6\cdot(6+3)\text{ см}^3 = 54\pi\sqrt{3}\text{ см}^3.$$

121.6. 1) $\frac{39\sqrt{3}}{4}$ дм^3. Указание. Необходимо доказать, что сечением является прямоугольник.

2) $\frac{32\,000\pi\sqrt{3}}{3}$ см^3.

122.1. 1) 27π см^2. 2) $\frac{500\pi}{3}$ дм^3. **122.2.** 1) $\frac{32\pi}{3}$ см^3. 2) $\frac{256\pi}{3}$ дм^3.

122.3. 1) Да. 2) $\frac{3}{4}\sqrt{3}$ дм^3. **122.4.** 1) Нет. 2) $\frac{9\pi\cdot\operatorname{tg}15^\circ}{8}$ дм^3.

122.5. 1) На рисунке 373, *а* показаны осевое сечение конуса и вписанного в него шара. Высота конуса $H=3r$. Радиус основания конуса $R=r\sqrt{3}$. $V_{\text{конуса}}=\frac{1}{3}\pi\cdot 3r^2\cdot 3r=3\pi r^3$; $V_{\text{шара}}=\frac{4}{3}\pi r^3$; $V_{\text{жидкости}}=$ $=3\pi r^3-\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{5\pi r^3}{3}$. Пусть x — уровень жидкости после того, как шар вынут из сосуда (рис. 373, *б*). $V_{\text{жидкости}}=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{x^2}{3}\cdot x=\frac{\pi x^3}{9}$; $\frac{5\pi r^3}{3}=\frac{\pi x^3}{9}$; $x^3=15r^3$, $x=r\sqrt[3]{15}$.

2) O_1 — центр вписанного в пирамиду шара (рис. 374), KO_1 — биссектриса $\angle PKO$. $\frac{PK}{KO}=\frac{PO_1}{OO_1}$; $\frac{PK}{9}=\frac{5}{3}$; $PK=15$ см. $PO=$ $=\sqrt{225-81}$ см $=12$ см. Радиус сферы $R=\frac{3}{8}PO=\frac{9}{2}$ см. Площадь сферы $S=4\pi\cdot\frac{81}{4}$, $S=81\pi$ см^2.

122.6. 1) 4500π см^3. 2) 16π см^2. У к а з а н и е. Задача решается аналогично задаче 122.5 (2).

122.7. Пусть R — радиус вписанного шара, φ — величина угла между образующей конуса и плоскостью основания (рис. 375). Радиус основания конуса $r=R\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}$. Высота конуса $H=R\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\cdot\operatorname{tg}\varphi$.

$$V_{\text{конуса}}=\frac{1}{3}\pi R^2\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}\cdot R\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\cdot\operatorname{tg}\varphi=\frac{\pi R^3\operatorname{tg}\varphi}{3\operatorname{tg}^3\frac{\varphi}{2}}=\frac{2\pi R^3}{3\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\right)};$$

$$V_{\text{шара}}=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

Исходя из условия, имеем $\frac{2\pi R^3}{3\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\right)}=\frac{9}{4}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3$.

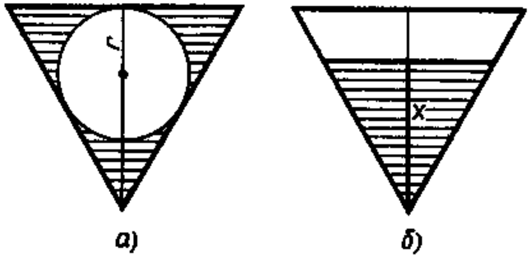

Рис. 373

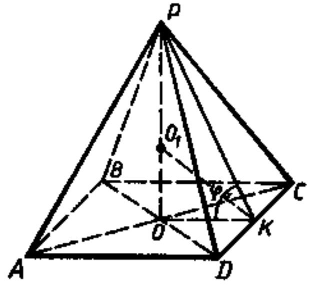

Рис. 374

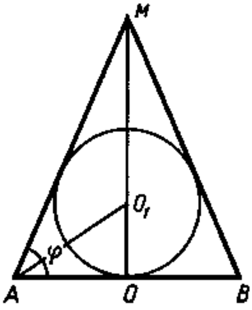

Рис. 375

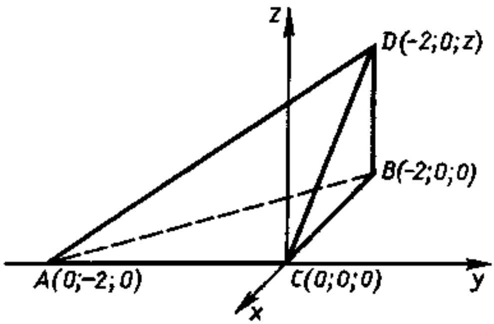

Рис. 376

Пусть $\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}=a>0$. Тогда получаем уравнение $9a^2-9a+2=0$, корни которого $a_1=\frac{1}{3}$ и $a_2=\frac{2}{3}$; $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $\varphi=60°$ или $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=$ $=\frac{\sqrt{6}}{3}$ и $\varphi=2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{6}}{3}$.

122.8. $\pi-4\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$ или $\pi-4\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}$. Указание. Задача решается аналогично задаче 122.7.

123.1. 1) а) В плоскости Oxy; б) $\frac{1}{2}$. 2) 0.

123.2. 1) а) В плоскости Oxy; б) 7. 2) 0.

123.3. 1) а) Параллельно плоскости Oxy; б) 10. Указание. Высота H пирамиды равна модулю разности аппликат вершины пирамиды и вершин основания; $H=3$. 2) 0.

123.4. 1) а) Параллельно плоскости Oxy; б) 10. Указание. См. указание к задаче 123.3. $H=|-5-1|=6$.

123.5. 1) Пусть координаты вершины $D(-2;\ 0;\ z)$, где $z>0$ (рис. 376), $\overrightarrow{AD}\{-2;\ 2;\ z\}$, $\overrightarrow{BC}\{2;\ 0;\ 0\}$. Если φ — угол между прямыми AD и AC, то

$$\cos\varphi=\left|\frac{-4}{2\sqrt{8+z^2}}\right|=\frac{2}{\sqrt{8+z^2}}.$$

По условию $\varphi=60°$, тогда $\frac{2}{\sqrt{8+z^2}}=\frac{1}{2}$. Учитывая, что $z>0$, получаем $z=2\sqrt{2}$. В таком случае $AC=2$, $BC=2$, $BD=2\sqrt{2}$ и нахождение площади поверхности тетраэдра не вызывает затруднений. Она равна $2(3+\sqrt{2}+\sqrt{3})$.

2) Поместим куб в прямоугольную систему координат, как это показано на рисунке 377. Положим, что ребро куба равно 1. Тогда $E\left(1;\ 0;\ \frac{1}{2}\right)$, $F\left(\frac{1}{2};\ 1;\ \frac{1}{2}\right)$, $B_1(0;\ 0;\ 1)$, $M\left(1;\ \frac{1}{2};\ 0\right)$ и

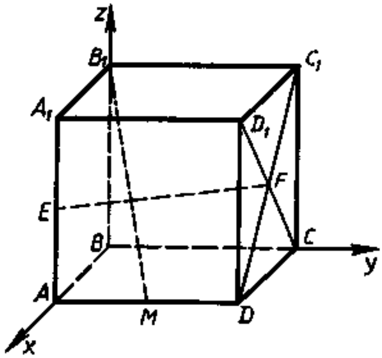

Рис. 377

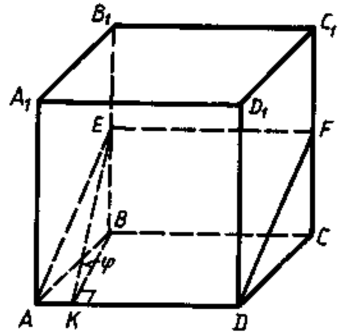

Рис. 378

$\overrightarrow{EF}\left\{-\frac{1}{2};\ 1;\ 0\right\}$, $\overrightarrow{B_1M}\left\{1;\ \frac{1}{2};\ -1\right\}$. Отсюда $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{B_1M}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+$
$+0=0$.

123.6. 1) $4(2+\sqrt{2})$. 2) 0. Указание. Задачи решаются аналогично задачам 123.5 (1, 2).

124.1. 2) а) Параллельны; б) пересекаются; в) скрещиваются. 3) $\frac{7}{17}$.

124.2. 2) а) Параллельны; б) скрещиваются; в) пересекаются. 3) $\frac{5}{7}$.

124.3. 2) $\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{3}}{3}$. 3) $\frac{1}{3}$. Указание. Объем призмы $AEBDFC$ равен произведению площади перпендикулярного сечения KEB на длину бокового ребра AD (рис. 378).

124.4. 2) $\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{3}}{3}$. 3) $\frac{1}{2}$. Указание. Объем пирамиды $CAEFB$ равен $\frac{1}{3}S_{AEFB}CL$, где CL — высота этой пирамиды (рис. 379).

124.5. Пусть AEF — искомое сечение, тогда $AK_1\perp MK$ и $EF\parallel BC$ (рис. 380). Пусть сторона основания пирамиды равна a и угол x — угол между ребром AM и плоскостью сечения. $AK_1=\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\sin 60^\circ=$ $=\frac{3a}{4}$; $K_1K=\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\cos 60^\circ=\frac{a\sqrt{3}}{4}$; $MK=\frac{a}{2\sqrt{3}\cdot\cos 60^\circ}=\frac{a}{\sqrt{3}}$; $MK_1=$ $=MK-K_1K=\frac{a}{\sqrt{3}}-\frac{a\sqrt{3}}{4}=\frac{a}{4\sqrt{3}}$; $\frac{MK_1}{K_1K}=\frac{1}{3}$. Тогда для построения сечения необходимо апофему пирамиды MK разделить в отношении 1:3 и полученную точку K_1 соединить с вершиной пирамиды A. Через эту же точку провести прямую EF, параллельную

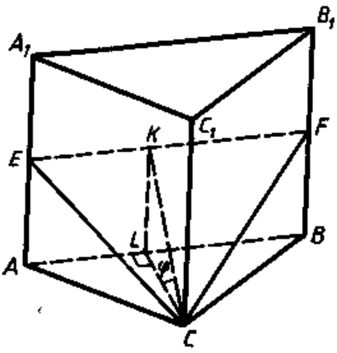

Рис. 379

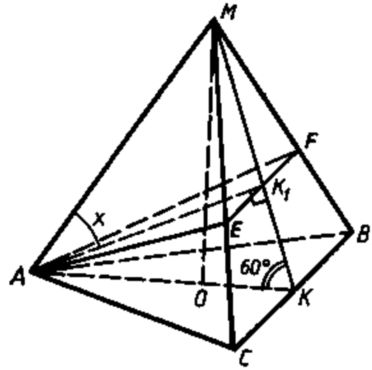

Рис. 380

BC. Пересекающиеся прямые AK_1 и EF задают плоскость сечения. Треугольник AEF — искомое сечение. Из подобия треугольников EMF и CMB следует, что $\frac{EF}{BC}=\frac{MK_1}{MK}$. Отсюда $EF=$ $=\frac{BC\cdot MK_1}{MK}=\frac{a}{4}$. $\operatorname{tg} x=\frac{MK_1}{AK_1}=\frac{1}{3\sqrt{3}}$ и $x=\operatorname{arctg}\frac{1}{3\sqrt{3}}$.

$$S_{AEF}=\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{4}\cdot\frac{3a}{4}=\frac{3a^2}{32};$$

$$V_1=V_{MAEF}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3a^2}{32}\cdot\frac{a}{4\sqrt{3}}=\frac{a^3\sqrt{3}}{384};$$

$$V_{MABC}=\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{a}{2}=\frac{a^3\sqrt{3}}{24};$$

$$V_2=\frac{a^3\sqrt{3}}{24}-\frac{a^3\sqrt{3}}{384}=\frac{15a^3\sqrt{3}}{384};\ \frac{V_1}{V_2}=\frac{1}{15}.$$

124.6. 2) $\arcsin\frac{\sqrt{5}}{5}$. 3) $\frac{3}{5}$. Указание. Искомое сечение изображено на рисунке 381, где $LK\perp MP$ и $EF\parallel AB$, $\angle MCK=$ $=x$ — угол между ребром MC и плоскостью сечения, причем $\sin x=\frac{KM}{CM}$.

125.1. 2) $\operatorname{arctg} 2$. 3) $\frac{3H^2\sqrt{15}}{4}$. 4) $4\pi H^2$.

125.2. 2) $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$. 3) $a^2\sqrt{3}$. 4) $\frac{\pi a^3\sqrt{2}}{3}$.

125.3. 1) $\frac{4R^2\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$. 2) $2R\cos^2\frac{\alpha}{2}$. 3) $\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{2}}\right)$.

125.4. 1) $\frac{3R^2\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}\cdot\sqrt{3}}{\cos\alpha}$. 2) $2R\cos^2\frac{\alpha}{2}$. 3) $\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha}{2}\right)$.

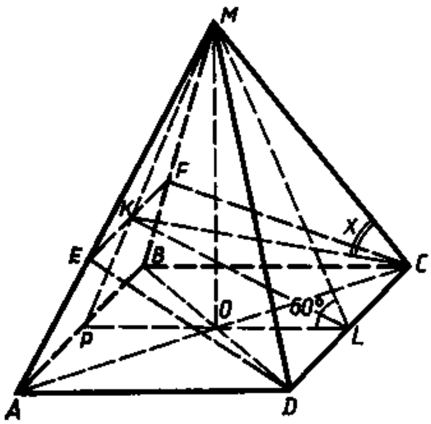

Рис. 381

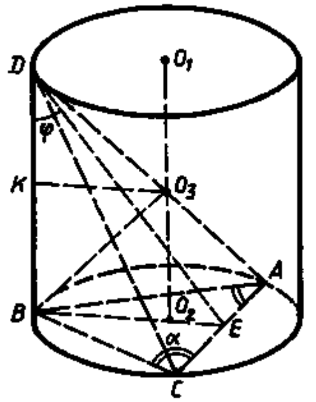

Рис. 382

125.5. Зная площадь описанной сферы, находим ее радиус: $R_{\text{сферы}}=\frac{a}{\sqrt{2}}$. На рисунке 382 O_3 — центр описанной сферы, а BO_3 — ее радиус. $AC=2R\sin 2\alpha$, где R — радиус основания цилиндра, $R=\frac{a}{2\sin 2\alpha}$. Из прямоугольного треугольника BO_2O_3 находим $O_2O_3=$ $=\sqrt{\frac{a^2}{2}-\frac{a^2}{4\sin^2 2\alpha}}=\frac{a\sqrt{-\cos 4\alpha}}{2\sin 2\alpha}$. Высота цилиндра (и пирамиды) $H=\frac{a\sqrt{-\cos 4\alpha}}{\sin 2\alpha}$. Площадь боковой поверхности цилиндра $S=2\pi RH=\frac{\pi a^2\sqrt{-\cos 4\alpha}}{\sin^2 2\alpha}$. $\angle BDE=\varphi$ — угол между ребром DB и плоскостью ADC. Из треугольника DBE находим, что $\operatorname{tg}\varphi=$ $=\frac{BE}{DB}=\frac{\sin^2\alpha}{\sqrt{-\cos 4\alpha}}$; $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{\sin^2\alpha}{\sqrt{-\cos 4\alpha}}$.

$$V_{\text{пирамиды}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\operatorname{tg}\alpha}{4}\cdot H;\quad V_{\text{цилиндра}}=\frac{\pi a^2 H}{4\sin^2 2\alpha}.$$

Отсюда $\frac{V_{\text{пирамиды}}}{V_{\text{цилиндра}}}=\frac{2\sin^2\alpha\cdot\sin 2\alpha}{3\pi}$.

125.6. 1) $\frac{\pi a^2\sqrt{\cos\alpha}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$. 2) $\operatorname{arctg}\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\cos\alpha}}$. 3) $\frac{2\sin\alpha\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}}{3\pi}$.

Ответы к контрольным заданиям

1.1. 1) 42 см или 8 см. 2) 78°. 3) Две точки вне отрезка AB, на расстоянии 2 см от его концов.

1.2. 1) 27 см или 3 см. 2) 120°. 3) Таких точек нет.

1.3. 1) 33 см или 3 см. 2) 126°. 3) Две точки вне отрезка MN, на расстоянии 2 см от его концов.

1.4. 1) 29 см или 21 см. 2) 100°. 3) Таких точек нет.

2.1. 3) а) 110°; б) 2 см. **2.2.** 3) а) 73°; б) 26 см.

2.3. 3) а) 4 см; б) 115°. **2.4.** 3) а) 50°; б) 140 мм.

3.1. 2) 27°, 27°, 126°. **3.2.** 2) 64°. **3.3.** 2) 106°. **3.4.** 2) 46°.

4.1. 1) 80°. 2) Может быть 39°. 3) 36 см.

4.2. 1) 100°. 2) Может быть 79°. 3) 24 см.

4.3. 1) 65°. 2) Может быть 69°. 3) 21 см.

4.4. 1) 100°. 2) Может быть 74°. 3) 13 см.

5.1. 2) 5 см. 3) 30°, 120°, 30°. **5.2.** 2) 14 см. 3) 45°, 90°, 45°.

5.3. 2) 14 см. 3) 120°, 30°, 30°. **5.4.** 2) 28 см. 3) 45°, 90°, 45°.

6.1. 1) 50°, 50°, 80°. 2) б) 31 дм. **6.2.** 1) 60°, 120°. 2) б) 41 см.

6.3. 1) 15°, 75°. 2) б) 23 см. **6.4.** 1) 25°, 25°, 130°. 2) б) 41 см.

7.1. 1) 780 см^2. 2) 160 см^2. 4) 6 см.

7.2. 1) 154 см^2. 2) 100 см^2. 4) 3 см.

7.3. 1) 15 см. 2) 54 см^2. **7.4.** 1) 12 см. 2) 96 см^2.

8.1. 1) б) 3:1; 9:1. 2) $36\sqrt{3}$ см^2. 3) 8 см.

8.2. 1) б) 4:49; 2:7. 2) 64 см.

8.3. 1) б) 4:25; 2:5. 2) 28 см. 3) 3 см.

8.4. 1) б) 1:4; 1:2. 2) 80 см^2.

9.1. 1) 25°51′, 64°9′, 18,1. 2) 28,2 см. 3) $2a\sin\frac{\alpha}{2}$; $2a\cos\frac{\alpha}{2}$. 4) $\frac{a}{b}$.

9.2. 1) 55°, 35°, 7,2. 2) 72,9 см. 3) $\dfrac{d}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$; $d\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}$. 4) $\frac{k}{p}$.

9.3. 1) 33°55′, 56°5′, 0,35. 2) 24,4 см. 3) $\dfrac{a}{\cos\alpha}$; $a\,\mathrm{tg}\,\alpha$. 4) $\frac{cx}{y}$.

9.4. 1) 50°42′, 39°18′, 23,5. 2) 21,6 см. 3) $a\sin\alpha$, $a+a\cos\alpha$. 4) $\frac{cx}{b}$.

10.1. 1) $16\sqrt{3}$ см. 3) 4,8 см. 4) Нет.

10.2. 1) $12\sqrt{2}$ см. 3) 3 см. 4) Нет.

10.3. 1) 5 см. 3) 30°. 4) Нет.

10.4. 1) $\dfrac{20\sqrt{3}}{3}$ см. 3) 45°. 4) Нет.

11.1. 2) а) $\overrightarrow{OA_1}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$; б) возможно, $x=-\frac{1}{3}$. 3) -4.

11.2. 2) а) $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BC}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$; б) нет. 3) $-\frac{1}{24}$.

11.3. 2) а) $\overrightarrow{CO}=\overrightarrow{CP}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CM}$; б) возможно, $y=-0{,}5$. 3) $\overrightarrow{MA}=-1{,}5\overrightarrow{MC}$.

11.4. 2) а) $\overrightarrow{MO}=\frac{2}{3}\overrightarrow{MH}-\overrightarrow{PH}$; б) нет.

12.1. 2) $(x+3)^2+(y-2)^2=25$. 4) Нет.

12.2. 1) 17. 2) Да. 4) Одну точку.

12.3. 2) $(x-2)^2+(y-1)^2=25$.

12.4. 1) 17. 2) Не принадлежит.

13.1. 1) 0,64. 2) 41,2. 3) Треугольник остроугольный. 4) $a^2\sin^2 3\alpha\sin^4\frac{\alpha}{2}\sin^2\alpha$.

13.2. 1) 9,91. 2) 1,21. 3) Треугольник тупоугольный. 4) $\frac{b^2\sin^2 3\varphi\sin 4\varphi}{\sin^2\varphi}$.

13.3. 1) 0,53. 2) 27,7. 3) Треугольник остроугольный. 4) $\frac{b^2\sin\frac{\varphi}{2}\sin^2\varphi}{2\sin\frac{3\varphi}{2}}$.

13.4. 1) 25,6. 2) 0,52. 3) Треугольник тупоугольный. 4) $\frac{a^2\sin^2\frac{3}{2}\alpha\sin 2\alpha}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}$.

14.1. 1) 18π дм^2. 2) 90°. 3) $5\sqrt{3}$ см.

14.2. 1) 48π см. 2) 20°. 3) $\frac{9}{4}\sqrt{6}$ см.

14.3. 1) 576 см^2. 2) $6\frac{2}{3}\pi$. 3) $21\sqrt{3}$ см.

14.4. 1) $72\sqrt{3}$ дм^2. 2) 48π см^2. 3) $\frac{32}{2}\sqrt{6}$ см.

15.1. 1) 1,8 см. 2) 0,8; 0,75. 3) 4 см, 5 см, 6 см^2. 4) $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CB}+0{,}64\overrightarrow{BA}$. 5) $6{,}25\pi$ см^2.

15.2. 1) $3\sqrt{3}$ см; $24\sqrt{3}$ см^2. 2) $2\sqrt{37}$ см. 3) Равносторонний. 4) $\overrightarrow{DE}=-\overrightarrow{CD}+0{,}75\overrightarrow{CB}$.

15.3. 1) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ см; $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ см^2. 2) 5:3. 3) $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ см^2. 4) $\overrightarrow{BE}=0{,}2\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$.

15.4. 1) 4 см; 12 см^2. 2) 0,6; 0,75. 3) 3,6 см. 4) $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AC}+0{,}72\overrightarrow{CB}$. 5) 3π см.

16.1. 2) Скрещиваются, 50°. **16.2.** 2) Скрещиваются, 35°.

16.3. 2) Скрещиваются, 55°. **16.4.** 2) Скрещиваются, 65°.

17.1. 1) 12 см^2. 3) Нельзя. **17.2.** 1) 108 см^2. 3) Пересекаются.

17.3. 1) 14 см^2. 3) Можно. **17.4.** 1) 124 см^2. 3) Пересекаются.

18.1. 1) 17 см. 2) 30°. 3) Квадрат. **18.2.** 1) 17 см. 2) 60°. 3) 90°.

18.3. 1) 11 см. 2) 30°. 3) 90°. **18.4.** 1) 12 см. 2) 45°. 3) Квадрат.

19.1. 1) 96 см^2. 2) а) $\frac{25\sqrt{3}(\sqrt{2}+1)}{3}$ см^2; б) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ см.

19.2. 1) $8\sqrt{15}(\sqrt{2}+1)$ см^2. 2) а) 48 см^2; б) $\sqrt{3}$ см.

19.3. 1) 162 см^2. 2) а) $\frac{9\sqrt{3}}{4}(1+\sqrt{2})$ см^2; б) $\frac{3\sqrt{6}}{4}$ см.

19.4. 1) $8\sqrt{7}(1+\sqrt{3})$ см^2. 2) а) $64\sqrt{3}(2+\sqrt{3})$ см^2; б) $2\sqrt{3}$ см.

20.1. 1) а) $\overrightarrow{AD_1}$; б) $\overrightarrow{A_1B}$. 2) $\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{d}$. 3) $\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\vec{c}$.

20.2. 1) а) $\overrightarrow{AD}$; б) $\overrightarrow{D_1C}$. 2) $-\frac{5}{6}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}+\frac{1}{6}\vec{d}$. 3) $\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$.

20.3. 1) а) $\overrightarrow{B_1A}$; б) $\overrightarrow{CC_1}$. 2) $\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{d}$. 3) $\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+$ $+\frac{2}{3}\vec{c}$.

20.4. 1) а) $\overrightarrow{C_1B}$; б) $\overrightarrow{AD_1}$. 2) $-\frac{5}{6}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}$. 3) $\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{d}$.

21.1. 1) 150°. 2) $-4\sqrt{2}-32$. 3) а) $\frac{\sqrt{5}a}{2}$; б) $\arccos\frac{\sqrt{15}}{15}$. 4) Плоскость Oxz.

21.2. 1) 135°. 2) $4-3\sqrt{3}$. 3) а) $b\sqrt{5}$; б) $\arccos\frac{\sqrt{15}}{15}$. 4) Ось Oy.

21.3. 1) 150°. 2) $-32{,}5$. 3) а) $\sqrt{5}c$; б) $\arccos\frac{\sqrt{15}}{5}$. 4) Плоскость Oxy.

21.4. 1) 45°. 2) $-6\sqrt{3}-16$. 3) а) $\frac{c\sqrt{5}}{2}$; б) $\arccos\frac{\sqrt{15}}{15}$. Ось Ox.

22.1. 1) 3 см. 2) $0{,}5\pi L^2(1+\sqrt{2})$. 3) $\frac{\sqrt{6}}{6}L$.

22.2. 1) 4 см. 2) $4\pi a^2$. 3) $0{,}5\sqrt{3}a$.

22.3. 1) 5 см. 2) $\pi R^2(1+\sqrt{2})$. 3) $\frac{\sqrt{3}}{3}R$.

22.4. 1) 5 см. 2) $2\pi R^2(1+\sqrt{2})$. 3) $0{,}5\sqrt{2}R$.

23.1. 1) 48 см^3. 2) $\frac{\pi R^3 \cos\alpha \operatorname{tg}\varphi}{3}$. 3) $3\sqrt{3}$ см.

23.2. 1) $\frac{250\sqrt{3}}{3}$ см^3. 2) $\frac{2\pi d^2 \operatorname{tg}\alpha}{\cos^2\alpha \operatorname{tg}\varphi}$. 3) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ см.

23.3. 1) $\frac{16\sqrt{2}}{3}$ см^3. 2) $\frac{\pi h^3 \operatorname{ctg}^2\varphi}{3\cos^2\frac{\alpha}{2}}$. 3) $2\sqrt{2}$ см.

23.4. 1) $\frac{256\sqrt{2}}{3}$ см^3. 2) $\frac{2\pi m^3\sqrt{\cos\varphi}}{\cos^3\frac{\varphi}{2}}$. 3) 4 см.

24.1. 1) 48. 2) $12\sqrt{7}$. 3) $\arccos\frac{3}{4}$. 4) 36. 5) $\frac{625\pi}{7}$. 6) $\arcsin\frac{\sqrt{14}}{8}$.

24.2. 1) $6\sqrt{39}$. 2) $12\sqrt{3}$. 3) $\arccos\frac{4}{5}$. 4) -12. 5) $\frac{32\pi}{81}(\sqrt{13}-2)^3$. 6) $\arcsin\frac{3\sqrt{39}}{26}$.

24.3. 1) $32\sqrt{7}$. 2) $\frac{128\sqrt{3}}{3}$. 3) $2\,\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{6}}{6}$. 4) 48. 5) $\frac{2048\sqrt{3}}{27}$. 6) $\arcsin\frac{\sqrt{21}}{7}$.

24.4. 1) $6\sqrt{3}$. 2) 3. 3) $\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}$. 4) -3. 5) $\frac{4}{3}\pi$. 6) $\arcsin\frac{3\sqrt{3}}{8}$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

***ЗИВ** Борис Германович*
***МЕЙЛЕР** Вениамин Михайлович*
***БАХАНСКИЙ** Александр Григорьевич*

ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ

Пособие для учащихся
7—11 классов
общеобразовательных учреждений

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редакторы *Н. Б. Грызлова, Л. В. Кузнецова*
Младший редактор *Н. В. Сидельковская*
Художник *Б. Л. Николаев*
Художественный редактор *Е. Р. Дашук*
Технический редактор *Р. С. Еникеева*
Корректоры *Р. П. Евдокимова, Н. Д. Цухай*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать с диапозитивов 28.07.03. Формат $60 \times 90^1/_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура Литературная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 17+0,31 форзац. Усл. кр.-отт. 17,81. Уч.-изд. л. 16,52+0,47 форзац. Тираж 30 000 экз. Заказ № 12266.

Федеральное государственное унитарное предприятие ордена Трудового Красного Знамени Издательство «Просвещение» Министерства Российской Федерации по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций. 127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

…ое предприятие ордена Трудового Красного Знамени …ат Министерства Российской Федерации по делам пе… …и средств массовых коммуникаций. 410004, Саратов, ул. Чернышевского, 59.